

Felice Carena

ELEMENTI
DELL'
ALGEBRA



PARTE PRIMA

DELLE REGOLE PER CALCOLARE LE QUANTITÀ ALGEBRAICHE.

1. L' Algebra ha per oggetto le regole per calcolare le quantità in una maniera generale, i metodi per risolverne i problemi, e gl'indirizzi per iscoprire le proprietà, e le convenienze delle grandezze.

2. Gli Algebristi si servono delle lettere dell' alfabeto per rappresentare indistintamente la quantità continua, e la discreta, ed usano alcuni segni per indicarne la somma, la sottrazione, il prodotto, il quoziente, la radice ec.

3. Questo segno + significa più, e indica la somma; quindi è, che $a + b$ rappresenta la quantità a unita alla quantità b.

Il segno — significa meno, e indica la sottrazione; dimodochè $a - d$ rappresenta, che la quantità d è sottratta dalla quantità a.

Il ſegno $\times$ indica la moltiplicazione; ſicchè $a \times b$ rappreſenta la quantità a moltiplicata per la quantità b.

Se poi ſopra il ſegno — ſi ſcrive una qualche quantità, ed un'altra ſotto di eſſo, come ſarebbe $\frac{a}{b}$, tal eſpreſſione indica, che la quantità a è diviſa per la quantità b.

Il ſegno $=$ ſerve per indicare l'uguaglianza fra due quantità; e però $m = n$ ſignifica, che la quantità m è uguale alla quantità n; $a + d = c - k$ vuol dire, che la ſomma $a + d$ è uguale alla quantità c meno la quantità k.

L'uguaglianza di due quantità eſpreſſa con il ſegno $=$ chiamaſi *Equazione*; così $9 = 4 + 5$ sarà un' equazione, in cui la quantità, che, come il 9, ſi trova alla ſiniſtra, diceſi primo membro, e quella quantità, che, come $4 + 5$, ſi trova alla dritta, chiamaſi ſecondo membro dell' equazione.

Il ſegno $>$ indica, che la quantità ſcritta verſo l'apertura dell'angolo è maggiore dell' altra, che trovaſi avanti la cima, e così $a > b$ indica, che la quantità a è maggiore della quantità b; l'eſpreſſione $c < d$ rappreſenta, che la quantità c è minore dell'altra d; l'eſpreſſione $c : g :: k : m$

indica una proporzione, in cui c stà al g come k ad m.

4. Le quantità algebraiche sono semplici, o composte, positive, o negative. Le quantità semplici s'esprimono con una, con due, o più lettere, senzachè vi sia frapposto il segno $+$, o il segno $-$; laonde a, o pure b è una quantità semplice, e così ancora sono quantità semplici abc, $dbca$, ec.

Le quantità composte s'esprimono con due, o più lettere, fra le quali si trova il segno $+$, o il segno $-$; come $a+b$, $a+b-cd$.

La quantità $a+b$ si dice di due termini, $a+b-cd$ si dice di tre termini, e così si dirà composta di quattro termini la quantità $a+b+c+d$ ec.

5. Delle quantità altre sono positive, cioè maggiori del nulla, altre negative, o minori del nulla. Le positive sono quelle, che hanno il segno $+$, come $+a+b$, o dicasi $a+b$, stantechè qualsivoglia lettera, la quale, essendo scritta sola, o a sinistra di una qualche altra quantità, dee avere il segno $+$, tal segno si suole tralasciare. Le quantità negative sono quelle, che a sinistra sono precedute dal segno $-$, come $-c$, $-a-d-f$.

Per intendere la ragione, per cui le quantità positive si chiamano maggiori del nulla, e le quantità negative minori del nulla, si consideri che, se s'aggiugne il zero ad una qualche quantità, questo non l'accresce, nè la diminuisce; per la qual cosa la quantità positiva potrà chiamarsi maggiore del zero, giacchè, essendo aggiunta ad un' altra quantità, l'accresce, ed all' opposito potrà dirsi minore del zero la quantità negativa, giacchè, se si unisce ad un' altra quantità, la diminuisce.

Per concepire facilmente la natura delle quantità negative, si rifletta, che i crediti si possono considerare per quantità positive, avvegnachè accrescono il peculio, ed i debiti si possono pigliare per quantità negative, stantechè lo diminuiscono. E però, se taluno fosse in uno stato tale, che non avesse altro, se non se un credito di 1000 scudi, ed un debito di 600, si direbbe, che quello ha scudi 1000 — 600, cioè 400 scudi, ed all'opposito, se avesse un credito di 700 scudi, ed un debito di 900, si direbbe, che ha — 200 scudi, cioè che dopo d'avere col suo credito scontato una parte del suo debito, dovrebbe ancora colla sua industria cercare di guadagnarsi 200 scudi per terminare di pa-

gare il debito, per quindi essere senza crediti, e senza debiti.

CAPO I.

Del modo di calcolare le quantità semplici, e primieramente del Sommare.

6. Due, o più quantità semplici si sommano collo scrivere l' una dopo l' altra, lasciando a ciascuna il suo rispettivo segno; sicchè per sommare $+a$ con $+b$ si scriverà $a+b$, così ancora per sommare a con $+b$ con $-c$ si scriverà $a+b-c$.

Occorrendo poi, che fra le quantità proposte a sommarsi se ne trovino due, o più espresse colle medesime lettere, e che abbiano lo stesso segno, in tale caso si scriverà una sola volta la medesima lettera, prefiggendo però ad essa un numero, che indichi quante volte questa quantità deve essere posta. Per esempio per sommare a con a con b, in vece di scrivere $+a+a+b$, si scriverà $2a+b$. Parimente se sia proposto a sommarsi ac con ac con db con db, la somma sarà $2ac+2db$. Questo modo di operare per esprimere più in breve la somma si chiama *correggere l' espressione*, o pure *fare la riduzione*.

7. I numeri, che sono prefissi a sinistra delle lettere, si chiamano *coefficienti*, e quelle quantità, che non hanno verun numero prefisso, si devono considerare come se avessero l' unità per coefficiente.

8. Qualora fra le quantità da sommarsi alcune espresse colle medesime lettere avranno il segno +, ed altre il segno —, in simil caso si sommeranno i coefficienti di quelle, che hanno il segno +, e a parte si sommeranno altresì i coefficienti di quelle, che hanno il segno —, indi si leverà la somma minore dalla maggiore, e il rimanente sarà il coefficiente da prefiggersi alla medesima quantità, per avere la somma delle quantità proposte. A questa somma si prefiggerà poi il segno delle quantità, i cui coefficienti hanno data la somma maggiore; sicchè per sommare $+ 4 a$, $+ 5 a$, $- 2 a$, $- a$, si sommeranno li coefficienti 4, e 5 delle quantità positive, e si avrà 9; dappoi si sommeranno li coefficienti 2, ed 1 delle quantità negative, e si avrà 3; laonde levando la somma minore 3 dalla maggiore 9, il rimanente 6 sarà il coefficiente da prefiggersi alla lettera a, e s' avrà $6 a$, che sarà la somma delle quantità proposte, e dovrà tale somma essere positiva, perchè la quantità $4 a$, $+ 5 a$, che hanno dato

la ſomma maggiore 9 dei coefficienti, hanno il ſegno $+$. Se poi ſi doveſſero ſommare le quantità $-4a$, $-5a$, $+2a$, $+a$, operando come quì avanti, la loro ſomma ſarà $-6a$. Operando nella ſteſſa maniera ſi troverà, che la ſomma $5c+3c-2c$ ſarà zero; poichè, fatta la dovuta ſottrazione dei coefficienti, eſſi s' annullano.

Sottrarre le quantità ſemplici.

9. Per ſottrarre una quantità da un' altra ſi deve mutare il ſegno a quella, che ſi deve ſottrarre, indi ſcriverla preſſo l' altra col ſegno mutato. Per eſempio ſe ſi vuole ſottrarre a da b, ſi ſcriverà $b-a$ per l' avanzo; ſe ſi dovrà ſottrarre $-b$ da $+a$, s' avrà $a+b$ per l' avanzo: imperciocchè, ſiccome il ſottrarre una quantità da un' altra è lo ſteſſo, che pigliare la differenza fra eſſe quantità, o dicaſi trovare quanto ſi debba aggiugnere alla quantità da ſottrarſi, acciocchè la ſomma ſia uguale alla quantità, da cui ſi deve far la ſottrazione; così aggiugnendo $+a$, $+b$ alla quantità da ſottrarſi $-b$, la ſomma ſarà $-b+a+b$, la quale ſi riduce ad a, che è la quantità, da cui ſi deve fare la ſottrazione. Nella medeſima maniera ſi proverà, che ſottrando b

dallà quantità $-a$ s' avrà di residuo $-a-b$, e sottrando $-b$ da $-a$, s' avrà $-a+b$.

Moltiplicare le quantità semplici.

10. Si moltiplicano fra loro le quantità semplici scrivendo l' una dopo l' altra senza verun segno frapposto; e così nel moltiplicare a per b si scriverà ab pel prodotto, per moltiplicare da per bc si scriverà $dabc$ pel prodotto, o sia $abcd$, essendo sempre lo stesso, comunque esse lettere vengano collocate.

Rispetto poi ai segni si dee osservare, che, se ambedue le quantità da moltiplicarsi hanno il segno $+$, od ammendue il segno $-$, al prodotto si prefiggerà sempre il segno $+$; ma, se l' una ha il segno $+$, e l' altra il segno $-$, al prodotto si dovrà prefiggere il segno $-$. Per conoscere il fondamento di questa regola, convien riflettere che, qualora si afferma il positivo, la conseguenza è sempre positiva, e che dee pure essere positiva la conseguenza, ognorachè si nega il negativo; e per contrario dovrà sempre essere negativa la conseguenza, sia che si neghi il positivo, o che si affermi il negativo. Ora, siccome il moltiplicare è pigliare una quantità tante volte,

quante unità sono nell' altra; così colla moltiplicazione si viene ad affermare, o a negare tante volte il valore positivo, o negativo del numero da moltiplicarsi, quante sono le unità nel moltiplicatore.

11. Allorchè le quantità da moltiplicarsi hanno dei coefficienti numerici, questi si dovranno moltiplicare fra loro, come si è insegnato nell' Aritmetica, ed il prodotto di questi sarà il coefficiente da prefiggersi ai prodotti letterali; così, dovendosi moltiplicare $4\,a\,b$ per $2\,c$, il prodotto sarà $8\,a\,b\,c$, il prodotto di $7\,c\,f$ per $5\,d\,m$ sarà $35\,c\,f\,d\,m$, il prodotto di $4\,c\,d$ per $-3\,f$ sarà $-12\,c\,d\,f$, il prodotto di $-6\,m\,n$ per $5\,a\,d$ sarà $-30\,a\,d\,m\,n$, il prodotto di $-7\,f$ per $-3\,k$ sarà $21\,f\,k$.

Dividere le quantità semplici.

12. La Divisione risolve ciò, che compone la moltiplicazione; laonde, siccome $a\,b$ è il prodotto di a per b, così, dividendo $a\,b$ per a, s' avrà il quoziente b; e però, se nel dividendo si trova la medesima lettera, o le medesime lettere, che sono nel divisore, basterà cancellare dal dividendo il divisore: per esempio dividendo $a\,b\,c$ per a, il quoziente sarà $b\,c$, dividendo $b\,c\,d$ per $b\,c$, il quoziente sarà d.

Se poi il divisore, e il dividendo avessero dei coefficienti numerici, in tale caso si dividerà altresì il coefficiente del dividendo pel coefficiente del divisore secondo le regole dell'Aritmetica, e il quoziente numerico si prefiggerà al quoziente letterale. Se si dee dividere $20\,c\,d$ per $5\,c$, il quoziente sarà $4\,d$; se poi il dividendo, e il divisore fossero espressi colle medesime lettere, ed avessero altresì lo stesso coefficiente, come sarebbe dividere $2\,a\,b$ per $2\,a\,b$, il quoziente sarà l' unità, perchè qualsivoglia quantità contiene una volta se medesima; ma se solamente alcune lettere del divisore saranno comuni con quelle del dividendo, allora si cancelleranno nel divisore, e nel dividendo quelle lettere, che sono comuni, e le rimanenti del dividendo si scriveranno sopra una lineetta, e sotto la stessa linea si scriveranno le rimanenti del divisore; per esempio il quoziente, che si ricava dividendo $a\,b\,c$ per $b\,d$, sarà $\frac{a\,c}{d}$.

Occorrendo poi, che il dividendo, e il divisore abbiano dei coefficienti, e che il minore misuri esattamente il maggiore, se ne farà la divisione, come nell'Aritmetica; dividendo $45\,c\,d\,f$ per $9\,a\,d$, il quo-

ziente ſarà $\frac{5cf}{a}$. Finalmente, ſe il diviſore, e il dividendo non avranno quantità comuni, allora ſi ſcriveranno in forma di frazione, ponendo il dividendo per numeratore, e il diviſore per denominatore. Volendo dividere a per b, s' indicherà il quoziente collo ſcrivere $\frac{a}{b}$; la medeſima coſa ſi praticherà riſpetto ai coefficienti, i quali non hanno altra miſura comune, fuorchè l' unità. Se ſi dovrà dividere $7cd$ per $3m$, ſi ſcriverà $\frac{7cd}{3m}$ pel quoziente.

13. La regola data nella moltiplicazione per li ſegni ſerve preciſamente per la diviſione. Allorchè il dividendo, e il diviſore hanno ammendue il ſegno $+$, o ammendue il ſegno $-$, ſi dovrà ſempre applicare al quoziente il ſegno $+$; e ſe l' uno avrà il ſegno $+$, e l' altro il ſegno $-$, in tal caſo ſi prefiggerà ſempre il ſegno $-$ al quoziente. Nel dividere $28cdf$ per $-7cd$, s' avrà di quoziente $-4f$; nel dividere $-36acm$ per $18ad$, s' avrà di quoziente $-\frac{2cm}{d}$. Nel dividere $-48afk$ per $-16ak$, s' avrà $3f$ di quoziente.

Delle Potestà delle quantità semplici.

14. Il prodotto, che si fa da una quantità moltiplicata una, o più volte in se stessa, chiamasi generalmenre *Potestà*, ovvero *grado*, ed in ispecie $a a$, che è il prodotto della quantità a moltiplicata una volta in se stessa, dicesi *seconda potestà*, cioè il quadrato di a, e moltiplicandosi $a a$ per a, il prodotto $a a a$ è la *terza potestà*, o dicasi il cubo di a, e così seguitando sarà $a a a a$ la *quarta potestà*, cioè il quadrato quadrato di a, ed $a a a a a$ la *quinta potestà* di a ec.

Per non replicare più volte la medesima lettera si suole scrivere a^2 in vece di $a a$, a^3 in vece di $a a a$, e così a^4 in luogo di $a a a a$, e così proseguendo collo scrivere alla dritta della lettera un numero alquanto più in alto, il quale contenga tante unità, quante volte dovrebbe essere replicata la medesima lettera. Questo numero si chiama l' *Esponente*, o l' *Indice* della potestà. Si dee quì osservare, che quelle quantità, le quali non hanno verun esponente, si debbono considerare, come se avessero l' unità; così a è lo stesso, che a^1, e dicesi prima potestà; lo stesso si dovrà

dire di tutte le altre quantità, che non hanno alcun esponente.

15. La quantità a sarà la radice di tutte le divisate potestà (§. 14.), cioè sarà la radice quadrata della seconda potestà, o del quadrato aa, sarà la radice cubica, o pure la terza radice della terza potestà a^3, la quarta radice della quarta potestà a^4 ec.

Si dee quì notare, che, siccome la medesima potestà si può riferire a diverse quantità, così può altresì avere diverse denominazioni. La quantità a^8 si dirà potestà ottava, se si riferisce ad a; quarta potestà, se si riferisce ad a^2, seconda potestà, se si riferisce ad a^4.

16. Importa sommamente avvertire di non confondere li coefficienti cogli esponenti delle quantità: imperciocchè, se s'abbia $3\,b$, sarà lo stesso, che $b + b + b$, e quindi se $b = 8$, sarà $3\,b = 8 + 8 + 8 = 24$: ma b^3 essendo lo stesso, che $b \times b \times b$, se $b = 8$, sarà $b^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$.

Dell' Estrazione delle radici dalle quantità semplici.

17. Estrarre la radice è trovare una quantità, che moltiplicata una, o più volte in se stessa produca la quantità proposta; si

ſcorge adunque, che la radice quadrata di $a\,a\,b\,b$ ella è $a\,b$, giacchè $a\,b$ moltiplicato una volta in ſe ſteſſo produce la quantità $a\,a\,b\,b$, così la radice cubica di $a^3\,b^3$ ella è $a\,b$, perchè $a\,b$ moltiplicato due volte in ſe ſteſſo produce $a^3\,b^3$, e perchè $-a\,b$ moltiplicato una volta in ſe ſteſſo produce altresì $+a^2\,b^2$, conſegue, che la radice quadrata di $a^2\,b^2$ potrà eſſere tanto $+a\,b$, quanto $-a\,b$. Per la ſteſſa ragione tutte le poteſtà poſitive, gli eſponenti delle quali ſono numeri pari, avranno la radice denominata dall' eſponente, la quale potrà eſſere poſitiva, e negativa.

Non ſuccede però lo ſteſſo circa le poteſtà, che hanno i loro eſponenti diſpari; imperciocchè $a^3\,b^3$ è bensì il cubo di $a\,b$, ma non può eſſerlo di $-a\,b$, perchè $-a\,b$ moltiplicato due volte in ſe ſteſſo produce $-a^3\,b^3$.

18. Allorchè dalla quantità propoſta non ſi può eſtrarre la radice, che ſi ricerca, ſi ſcrive a ſiniſtra della quantità propoſta queſto ſegno $\surd$, il quale ſi chiama *Segno radicale*, ſopra cui ſi ſcrive il numero, che indica la radice, che ſi vuole eſtrarre dalla quantità propoſta, e così per indicare la radice quadrata di a, ſi ſcriverà

$\sqrt[n]{a}$, per rappreſentare la radice cubica di $a\,b$ ſi ſcriverà $\sqrt[3]{a\,b}$, per denotare la radice quarta di $a^2\,b^3$ ſi ſcriverà $\sqrt[4]{a^2 b^3}$, per rappreſentare la radice cubica di $-c^2\,m^2$ ſi ſcriverà $\sqrt[3]{-c^2\,m^2}$. Quando però ſi tratta di cavare la radice quadrata, ſi ſuole intralaſciare il numero ſopra il ſegno radicale, e così per indicare la radice quadrata di a, baſterà ſcrivere $\sqrt{a}$.

Importa quì l'oſſervare, che la radice quadrata di $-bb$ non ſi può eſprimere, che per $\sqrt{-bb}$, avvegnachè, eſſendo bb un quadrato negativo, non ſi comprende come poſſa eſſere prodotto, non potendoſi dire, che la radice di $-bb$ ſia $-b$, poichè moltiplicandoſi $-b$ in ſe ſteſſo ſecondo le regole della moltiplica, produce $+bb$, e non già $-bb$; nè tampoco può dirſi, che la radice di $-bb$ ſia $+b$, poichè moltiplicandoſi $+b$ in ſe ſteſſo produce altresì $+bb$. Per la ſteſſa ragione la radice quarta di $-b^4$, e quella di $-b^8$ non ſi potranno eſprimere, che per $\sqrt[4]{-b^4}$, e $\sqrt[8]{-b^8}$. Lo ſteſſo ſi dirà di tutte le altre radici di eſponenti pari, che ſi debbono cavare da quantità nega-

tive; ma se le radici da cavarsi saranno d' esponente impari, come se si dovesse estrarre la radice cubica di $-b^3$, tale radice si potrà esprimere per $-b$, come pure la radice quinta di $-b^5$ si potrà esprimere altresì per $-b$. Queste conseguenze hanno dato motivo di distinguere le quantità in *Reali*, cioè realmente esistenti, come sono a, $\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{-b}$, ed in quantità *Immaginarie*, cioè che si possono solamente immaginare, come $\sqrt{-bb}$, $\sqrt[4]{-b^4}$, $\sqrt[2]{-b}$ ec.

19. Giacchè per innalzare una frazione a qualsivoglia potestà, egli è d' uopo innalzare tanto il numeratore, quanto il denominatore alla potestà proposta, così per estrarre qualunque radice da una frazione, si dovrà estrarre la radice tanto dal numeratore, quanto dal denominatore; la radice del numeratore sarà il numeratore, e la radice del denominatore sarà il denominatore della radice ricercata; così la radice quadrata di $\frac{aa}{bb}$ sarà $\frac{a}{b}$, la radice cubica di $\frac{a^3b^3}{c^3}$ sarà $\frac{ab}{c}$, ma la radice quadrata di $\frac{a}{b^2}$ sarà $\frac{\sqrt{a}}{b}$, ovvero $\sqrt{\frac{a}{b^2}}$, perchè

chè dal numeratore non ſe ne può eſtrarre la radice. La radice cubica di $\frac{a^2}{b^2}$ ſarà $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}}$, o dicaſi $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$, perchè non ſi può eſtrarre la radice nè dal numeratore, nè dal denominatore.

Se nelle frazioni s'incontreranno dei coefficienti, ſe ne eſtrarrà la radice a tenore delle regole date per le frazioni numeriche; e però la radice quadrata di $\frac{25\,c^2\,d^2}{9\,f^2}$ ſarà $\frac{5\,c\,d}{3\,f}$, la radice cubica di $\frac{343\,a^3d^3}{8\,m^3}$ ſarà $\frac{7\,a\,d}{2\,m}$; ma la radice quadrata di $\frac{12\,a\,c}{5\,d}$ ſarà $\sqrt{\frac{12\,a\,c}{5\,d}}$, ſtantechè non ſi può eſtrarre nè dai numeri, nè dalle lettere.

Del calcolo delle poteſtà ſemplici.

20. Il modo d'eſprimere colle cifre qualunque poteſtà di una quantità ſemplice ſomminiſtra un mezzo facile per moltiplicare, e dividere le poteſtà, per innalzarle a qualſivoglia grado, e per eſtrarne qualunque radice, valendoſi perciò degli eſponenti di eſſe.

Abbiansi per esempio le potestà della quantità a, le quali sono a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, ec. a^∞ (ponendosi a^∞ per la quantità a innalzata alla potestà infinita). Volendo moltiplicare una di queste potestà per un' altra, si sommerà l' esponente dell' una coll'esponente dell' altra, e la somma sarà l' esponente del prodotto. Sicchè per moltiplicare a^2 per a^4 si sommerà l' esponente 2 coll' esponente 4, la somma 6 sarà l' esponente del prodotto, dimodochè tale prodotto sarà a^6. Imperciocchè, essendo a^2 lo stesso, che $a\,a$, ed a^4 lo stesso, che $a\,a\,a\,a$, il prodotto di a^2 per a^4 sarà lo stesso, che il prodotto di $a\,a$ moltiplicato per $a\,a\,a\,a$, il qual prodotto è $a\,a\,a\,a\,a\,a$, cioè a^6 (§. 14.).

21. Per dividere una potestà di a per un' altra potestà di a si leverà l' esponente del divisore dall' esponente del dividendo, e il residuo sarà l' esponente del quoziente; sicchè per dividere a^5 per a^3 si leverà l' esponente 3 del divisore a^3 dall' esponente 5 del dividendo a^5, il residuo 2 sarà l' esponente del quoziente, dimodochè tale quoziente sarà a^2. Imperciocchè, essendo a^5 lo stesso, che $a\,a\,a\,a\,a$, ed a^3 lo stesso, che $a\,a\,a$, il quoziente di a^5 diviso per a^3 sarà lo stesso, che il quoziente di $a\,a\,a\,a\,a$ diviso per $a\,a\,a$, cioè $a\,a$, o dicasi a^2.

22. Dalla precedente regola consegue, che, se si dividerà a per a, o dicasi a^1 per a^1, il quoziente sarà a^{1-1}, ovvero a^0, ma il quoziente di a diviso per a è uguale alla unità (§. 12.), adunque a^0 sarà equivalente ad 1; e perchè, se si divide ancora a^0 per a^1, il quoziente sarà a^{0-1}, ovvero a^{-1}, e dividendo a^0 per a^2, il quoziente sarà a^{-2}, e dividendo a^0 per a^3, il quoziente sarà a^{-3}; così se si seguiterà la divisione, s' avrà la serie di potestà a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}, a^{-6}, ec. $a^{-\infty}$, gli esponenti delle quali sono negativi, ove $a^{-\infty}$ appresenta a^0, o dicasi 1 diviso per a^∞, cioè per l' infinita potestà di a, e conseguentemente $a^{-\infty}$ sarà una quantità infinitamente picciola.

23. Ora, poichè a^0 è uguale ad 1, e che il quoziente di a^0 diviso per a^1 si può altresì rappresentare scrivendo $\frac{1}{a^1}$ (§. 12.), così sarà $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$: parimenti, siccome il quoziente di a^0, o dicasi di 1 diviso per a^2 si può rappresentare scrivendo $\frac{1}{a^2}$, così $\frac{1}{a^2}$ sarà lo stesso, che a^{-2}, e per la stessa ragione si troverà, che a^{-3} sarà

uguale ad $\frac{1}{a^3}$, che a^{-4} ſarà lo ſteſſo che $\frac{1}{a^4}$. E generalmente, ſe n rappreſenta un qualſivoglia numero ſarà a^{-n} lo ſteſſo, che $\frac{1}{a^n}$.

24. Siccome per dividere a^0 per a^{-n} ſi dee ſottrarre l' eſponente $-n$ del diviſore a^{-n} dall' eſponente del dividendo a^0; così il quoziente di a^0 diviſo per a^{-n} ſarà a^n. Ma il quoziente di a^0, o dicaſi di 1 diviſo per a^{-n} ſi può altresì rappreſentare ſcrivendo $\frac{1}{a^{-n}}$; adunque $\frac{1}{a^{-n}}$ ſarà lo ſteſſo, che a^n.

25. Si ſcorge adunque, che una qualſivoglia poteſtà col ſuo eſponente negativo ſi può ſenza mutare il ſuo valore trasformare in modo, che il ſuo eſponente reſti poſitivo, e così vicendevolmente, il che ſi fa (ſupponendo, che la poteſtà propoſta ſia un intero) col mutare il ſegno all' eſponente della poteſtà, e indi ponendo la medeſima poteſtà col ſegno mutato dell' eſponente per denominatore di un rotto, il cui numeratore ſia l' unità.

26. Che ſe le poteſtà, le quali hanno eſponenti negativi, ſi trovaſſero moltiplicate per qualche quantità, come ſe in vece di a^{-n} s' aveſſe $q\,a^{-n}$, dove q rappreſenta

qualſivoglia quantità, ſi proverà, che $q\,a^{-n}$ è lo ſteſſo, che $\frac{q}{a^n}$: imperciocchè, eſſendo a^{-n} lo ſteſſo, che $\frac{1}{a^n}$, $q\,a^{-n}$, o dicaſi $q \times a^{-n}$ ſarà lo ſteſſo, che $q \times \frac{1}{a^n}$, ovvero lo ſteſſo, che $\frac{q}{a^n}$.

27. Adunque, ſe una poteſtà col ſuo eſponente negativo ſi trova moltiplicata per qualche quantità, ſi potrà ſenza mutare il ſuo valore trasformare in modo, che il ſuo eſponente reſti poſitivo, e così vicendevolmente, il che ſi fa col mutare il ſegno all' eſponente della poteſtà, e indi porre la medeſima poteſtà col ſegno mutato dell' eſponente per denominatore d' un rotto, il cui numeratore ſia la quantità, per cui tale poteſtà ſi trovava moltiplicata.

28. Finalmente, ſe la poteſtà propoſta foſſe contenuta in un rotto, baſterà mutare l' eſponente della poteſtà, e col ſegno mutato farla paſſare dal numeratore nel denominatore, o contrariamente dal denominatore nel numeratore, ſecondochè la detta poteſtà ſi troverà nel numeratore, o nel denominatore. Se ſi voleſſe trasformare la poteſtà a^{-3}, che è contenuta nella

frazione $\frac{b a^{-1}}{4}$ in modo, che l'esponente di tale potestà diventasse positivo, s'avrebbe $\frac{b}{4 a^{1}}$, e se si volesse trasformare la potestà b^{-2}, che è contenuta nella frazione $\frac{m c}{b^{-2}}$, s'avrebbe $m c b^{2}$.

29. Allorchè si dee innalzare una data potestà alla seconda, alla terza, alla quarta ec. potestà, si moltiplicherà l'esponente della data potestà per l'esponente della potestà, alla quale si dee innalzare, ed il prodotto sarà l'esponente della potestà ricercata.

Per esempio se si dee elevare la potestà a^{2} alla terza potestà, si moltiplicherà l'esponente 2 per l'esponente 3, e s'avrà 6 di prodotto; onde a^{6} sarà la terza potestà di a^{2}; imperciocchè, essendo a^{2} lo stesso, che $a a$, il cubo di a^{2} sarà lo stesso, che il cubo di $a a$, ma il cubo di $a a$ è $a a a a a a$, cioè a^{6}, adunque il cubo, o dicasi la terza potestà di a^{2} sarà a^{6}; parimente per innalzare a^{3} alla quarta potestà, si moltiplicherà l'esponente 3 per l'esponente 4, e s'avrà 12.: sicchè a^{12} sarà la quarta potestà di a^{3}.

30. Per estrarre la radice da una qualche potestà si divide l'esponente della po-

teſtà pel numero, che indica la radice, che ſi dee eſtrarre, e il quoziente ſarà l'eſponente della radice ricercata. Perciò, ſe ſi voglia la terza radice di a^6, ſi dividerà l'eſponente 6 per 3, e s'avrà il quoziente 2, che ſarà l'eſponente della radice ricercata; ſicchè eſſa radice ſarà a^2: imperciocchè, ſiccome per innalzare a^2 alla terza poteſtà, biſogna moltiplicare l'eſponente 2 per l'eſponente 3 per avere l'eſponente 6 della poteſtà ricercata, così per eſtrarre la terza radice di a^6, ſi dovrà dividere l'eſponente 6 per 3 per avere l'eſponente 2 della radice, che ſi ricerca; e così ancora per avere la ſeconda radice di a^1, ſi dividerà l'eſponente 1 per 2, e s'avrà $a^{\frac{1}{2}}$, che ſarà la radice quadrata di a^1; per la ſteſſa ragione ſarà $a^{\frac{1}{3}}$ la terza radice di a^1, e ſarà $a^{\frac{1}{4}}$ la quarta radice di a^1; così ancora $a^{\frac{2}{5}}$ ſarà la quinta radice di a^2; onde chiaramente ſi vede, che le quantità $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ec., le quali hanno il ſegno radicale, ſi poſſono altresì rappreſentare in queſt' altra guiſa $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ ſenza mutarne il valore.

CAPO II.

Del modo di calcolare le Quantità composte, e primieramente del modo di sommarle.

31. Si sommano le quantità composte, scrivendo le une dopo le altre, lasciando a ciascuna il suo rispettivo segno, indi si corregge l'espressione, se sia di bisogno. Sicchè, se con $a - b$ si dee sommare $c - d$, la somma sarà $a - b + c - d$. Se alla quantità $2a^2 + b^2$ si dee aggiugnere $a^2 - b^2$, s'avrà la somma $2a^2 + b^2 + a^2 - b^2$; ma perchè $2a^2 + a^2$ è lo stesso, che $3a^2$, e che $+ b^2 - b^2$ s'elidono, così la somma delle quantità proposte sarà $3a^2$.

Della sottrazione delle quantità composte.

32. Per sottrarre le quantità composte si uniscono le due quantità proposte, mutando i segni a quella, che si deve sottrarre, indi si corregge l'espressione. Per sottrarre $c - d$ da $a + b$, il residuo sarà $a + b - c + d$: imperciocchè, dovendosi dalla quantità $a + b$ sottrarre la quantità c diminuita della quantità d, si scorge, che, se da $a + b$ si leva la quantità c, si leva di troppo, onde il rimanente $a + b - c$ rie-

ſce minore di ciò, che dovrebbe eſſere della quantità d; laonde per avere il vero reſiduo dovraſſi aggiugnere eſſa quantità d. Per ſottrarre $2a - 3bc$ da $2bc + 4a$ ſi ſcriverà $2bc + 4a - 2a + 3bc$; e perchè, facendo la riduzione, $2bc + 3bc$ è lo ſteſſo, che $5bc$, e $4a - 2a$ è lo ſteſſo, che $2a$, così il reſiduo ſarà $5bc + 2a$.

Della moltiplicazione delle Quantità composte.

33. Per moltiplicare le quantità compoſte ſi ſcrive l' una ſotto l' altra, indi tutti i termini del moltiplicando ſi moltiplicano per ciaſcun termine del moltiplicatore, e ſe ne ſcrive il prodotto ſotto una linea

$$\begin{array}{l} 2a + 2bc - 3c \\ \underline{3a + 3bc - 2c} \\ 6aa + 6abc - 9ac \\ \qquad + 6abc \qquad + 6b^2c^2 - 9bc^2 \\ \qquad\qquad - 4ac \qquad - 4bc^2 + 6c^2 \\ \hline 6aa + 12abc - 13ac + 6b^2c^2 - 13bc + 6c^2 \end{array}$$

Se ſia propoſto a moltiplicarſi la quantità $2a + 2bc - 3c$ per la quantità $3a + 3bc - 2c$, ſi ſcriverà il moltiplicatore $3a + 3bc - 2c$ ſotto la quantità da moltiplicarſi $2a + 2bc - 3c$, indi tirata una

linea al di ſotto, ſi moltiplicherà queſta pel primo termine $3a$ del moltiplicante; dicendoſi $2a$ per $3a$ produce $6aa$, $+2bc$ per $+3a$ dà $6abc$, $-3c$ per $+3a$ produce $-9ac$, e queſti prodotti ſi ſcriveranno ſotto la linea. Dappoi ſi moltiplicherà di nuovo la medeſima quantità poſta al di ſopra pel ſecondo termine $3bc$ del moltiplicante; dicendo $2a$ per $3bc$ produce $6abc$; e ſiccome ſi ha già un altro prodotto $6abc$, che ha le medeſime lettere, così ſi ſcriverà queſto ſotto l' altro, ciò, che ſempre ſi deve praticare per rendere più facile la riduzione. Inoltre $2bc$ per $3bc$ dà $6b^2c^2$; e perchè non v' è alcun altro termine eſpreſſo colle medeſime lettere, ſi ſcriverà $6b^2c^2$ in fila, e più avanzato verſo la dritta; $-3c$ per $+3bc$ produce $-9bc^2$; finalmente moltiplicati tutti i termini $2a+2bc-3c$ pel terzo termine $-2c$ del moltiplicante, s'avranno li prodotti $-4ac-4bc^2+6c^2$. Pertanto ſommati tutti li prodotti inſieme, e fatta la riduzione, s' avrà la quantità $6aa+12abc-13ac+6b^2c^2-13bc^2+6c^2$, che ſarà il prodotto ricercato.

34. Avvertaſi, che alcuna volta non è neceſſario di fare la moltiplicazione nel modo ſovra eſpreſſo, ma baſta indicarla

col ſegno della moltiplicazione, tirando però una linea retta ſopra ciaſcuna delle quantità da moltiplicarſi, la quale s'eſtenda ſopra tutti i termini di quelle; perciò, ſe s'abbia a moltiplicare $ab - 2bc$ per $a^2 - c^2$, ſi ſcriverà $\overline{ab - 2b^3c} \times \overline{a^2 - c^2}$.

Della Diviſione delle quantità compoſte.

35. Per dividere una quantità compoſta per una quantità ſemplice, baſta dividere ciaſcun termine della quantità compoſta per la quantità ſemplice (§. 12.). Per dividere $ac - ab$ per a, ſi dividerà ogni termine di $ac - ab$ pel diviſore a; e ſiccome dalla diviſione del primo termine ac pel diviſore a ſi ha il quoziente $+c$, e dalla diviſione del ſecondo termine $-ab$ pel diviſore a ſi ha il quoziente $-b$; così il quoziente di $ac - ab$ diviſo per a ſarà $c - b$.

36. Se poi il dividendo, e il diviſore ſaranno quantità compoſte: come ſe ſi doveſſe dividere $a^4 - b^4$ per $a + b$: ſi comincerà a ſcrivere il diviſore $a + b$, e tirata una linea alla dritta, dopo di queſta ſcrivaſi il dividendo $a^4 - b^4$;

poscia per procedere con qualche ordine piglisi nel dividendo un termine, in cui vi sia una lettera, la quale abbia l' esponente maggiore, che in qualsivoglia altro termine; sicchè nel dividendo $a^4 - b^4$ si potrà pigliare a^4, perchè non v' è termine, in cui vi sia una maggior potestà della lettera a; per la medesima ragione ancora potrebbesi eleggere il termine $- b^4$. Avendo dunque preso $+ a^4$, si dividerà per quel termine del divisore, in cui la stessa lettera a avrà maggior esponente, cioè per $+ a$, e fatta tale divisione, trovandosi $+ a^3$ di quoziente, scriverassi a^3 sotto il divisore $a + b$, e per lo stesso quoziente si moltiplicherà tutto il divisore $a + b$; indi sottrisi il prodotto $a^4 + a^3 b$ dal dividendo $a^4 - b^4$, e s'avrà $a^4 - b^4 - a^4 - a^3 b$ di residuo; sicchè fatta la riduzione, cioè cancellando i termini $a^4 - a^4$, che s' elidono, s' avrà il residuo $- b^4 - a^3 b$. Di nuovo in questo residuo prendasi quel termine, in cui la lettera a già presa da principio abbia il maggior esponente, che in qualsivoglia altro termine del detto avanzo, il quale si è $- a^3 b$, e diviso $- a^3 b$ per a, che è il termine già da principio eletto nel divisore, s' avrà $- a^2 b$ di quoziente, che si scriverà a lato del primo

quoziente $+ a^3$ già ritrovato. In oltre per lo ſteſſo quoziente $- a^2 b$ ſi moltiplichi il diviſore, e il prodotto $- a^3 b - a^2 b^2$ ſottratto dal primo reſto $- b^4 - a^3 b$, e fatta indi la riduzione, s' avrà il reſiduo $- b^4 + a^2 b^2$. Non altrimenti di prima eleggaſi in queſt' ultimo reſiduo un termine, in cui la ſteſſa lettera a abbia il maggior eſponente, per eſempio $a^2 b^2$, e queſto diviſo per $+ a$, che è il termine del diviſore già da principio eletto, darà di quoziente $+ a b b$ da ſcriverſi preſſo il quoziente in ultimo luogo ricavato, e per queſto quoziente ſi moltiplichi altresì tutto il diviſore, e il prodotto $a^2 b^2 + a b^3$ levato dall' ultimo reſiduo $- b^4 + a^2 b^2$, rimarrà, corretta l'eſpreſſione, $- b^4 - a b^3$. Finalmente preſo in queſto reſiduo il termine $- a b^3$, cioè quello, in cui la lettera a ſi trova innalzata alla maggior poteſtà di ciò, che ſia in qualſivoglia altro termine del dividendo, e diviſo per lo ſteſſo termine a del diviſore, pongaſi il quoziente $- b^3$ a canto degli altri quozienti parziali, indi per queſt' ultimo quoziente ſi moltiplichi come ſopra lo ſteſſo diviſore, e ſottratto parimente il prodotto $- a b^3 - b^4$ dall' ultimo avanzo $- b^4 - a b^3$, ſi troverà, che tutti i termini ſi cancellano. Terminata così la di-

visione, s'avrà per quoziente la somma dei quozienti parziali $a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3$, che si sono scritti sotto il divisore.

37. Se poi con tale procedimento non si potesse ridurre a fine la proposta divisione, ma vi restasse un qualche avanzo, il quale non fosse divisibile pel termine del divisore preso da principio; come se fosse proposto a dividersi $a^4 - b^4 + c d^3$ per $a + b$, dove si troverebbe, dopo aver fatte le dovute operazioni, l'avanzo cd^3, il quale non si potrebbe dividere per a, in tal caso s'aggiugnerà al quoziente ritrovato $a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3$ la frazione $\frac{c d^3}{a + b}$, il cui numeratore sarà l'avanzo $c d^3$, e il denominatore $a + b$, che è il dato divisore: laonde in tale guisa il quoziente della proposta divisione sarebbe $a^3 - a^2 b + a b b - b^3 + \frac{c d^3}{a + b}$, il qual quoziente si potrebbe altresì rappresentare con un sol rotto, ponendo l'intera quantità da dividersi $a^4 - b^4 + c d^3$ pel numeratore, e pel denominatore il dato divisore $a + b$, di sorta, che la frazione $\frac{a^4 - b^4 + c d^3}{a + b}$ indicherebbe il quoziente ricercato.

38. Le poteſtà delle quantità compoſte s' ottengono pure colla moltiplicazione (§. 14.). Se ſi moltiplicherà la quantità $a + b$ una volta in ſe ſteſſa, il prodotto $a^2 + 2\,a\,b + b^2$ ſarà il quadrato di quella, e moltiplicandoſi la quantità $a + b$ due volte in ſe ſteſſa, il prodotto $a_3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$ ſarà il cubo, e ſe la quantità $a + b$ ſi moltiplicherà tre volte in ſe ſteſſa, il prodotto $a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$ ſarà la quarta poteſtà, e così ſeguitando ſi troverà la quinta, e la ſeſta ec. poteſtà di $a + b$, come ſi oſſerva nella ſeguente tavola, che ſi potrà eſtendere a beneplacito.

TAVOLA DELLE POTESTÀ DI $a + b$.

$a + b$
$a^2 + 2\,a\,b + b^2$
$a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$
$a^4 + 4a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,ab^3 + b^4$
$a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,ab^4 + b$
$a^6 + 6\,a^5\,b + 15\,a^4\,b^2 + 20\,a^3\,b^3 + 15\,a^2\,b^4 + 6\,ab^5 + b^6$.

39. Giacchè dalla tavola delle poteſtà (§. 38.) riſulta, che il quadrato d' una qualſivoglia quantità $a + b$ compoſta di due

termini, o sia di due parti, contiene i quadrati aa, bb di ciascuna d'esse parti, e di più $2ab$, che è il doppio prodotto, che si fa delle stesse parti, consegue, che, considerando una quantità di tre termini $a+b+c$ come composta di due termini, de' quali il primo sia $a+b$, il secondo sia c; il quadrato di tale quantità sarà altresì composto dal quadrato della prima parte $a+b$, dal doppio prodotto d'essa prima parte moltiplicata per la seconda c, e dal quadrato della seconda; ma il quadrato di $a+b$ è composto dal quadrato di a, dal doppio prodotto di a moltiplicato per b, e dal quadrato di b; dunque il quadrato di una qualsivoglia quantità composta di tre termini contiene il quadrato del primo termine, il doppio prodotto del primo termine moltiplicato pel secondo, il quadrato del secondo, il doppio prodotto, che si fa dai due primi termini moltiplicati pel terzo con il quadrato del terzo.

Non altrimenti considerandosi la quantità composta di quattro termini $a+b+c+d$, come una quantità di due termini, de' quali il primo sia $a+b+c$, e il secondo sia d; il quadrato di tale quantità conterrà altresì il quadrato del primo ter-

mine

mine $a + b + c$, il doppio prodotto del primo moltiplicato pel ſecondo d, e il quadrato d' eſſo ſecondo; ma il quadrato di $a + b + c$ contiene il quadrato di a, il doppio prodotto di a moltiplicato per b, il quadrato di b, il doppio prodotto di $a + b$ moltiplicato per c con il quadrato di c. Adunque il quadrato di $a + b + c + d$ contiene il quadrato del primo termine, il doppio prodotto del primo termine moltiplicato pel ſecondo, il quadrato del ſecondo, il doppio prodotto dei due primi termini moltiplicati pel terzo, il quadrato del terzo, il doppio prodotto dei tre primi termini moltiplicati pel quarto, e il quadrato del quarto.

Nella ſteſſa maniera s' arriverà a conoſcere, che il quadrato di una quantità di cinque termini contiene, oltre il quadrato dei quattro primi termini, il doppio prodotto d' eſſi quattro primi moltiplicati pel quinto, con il quadrato del quinto, e che il quadrato di quella quantità, che ha ſei termini, contiene, oltre il quadrato dei cinque primi termini, il doppio prodotto d' eſſi cinque primi termini moltiplicati per lo ſeſto, e il quadrato del ſeſto; e così ſeguitando, ſe i termini d' una qualſivoglia quantità foſſero in maggior numero.

40. Occorrendo, che uno, o più termini della quantità proposta avessero il segno —, in tal caso si dovrà nella tavola (§. 38.) ai quadrati di tali termini sempre prefiggere il segno +, ed agli altri prodotti si prefiggerà il segno +, allorchè le parti, dalle quali sono formati, hanno ammendue il segno +, od ammendue il segno —; ed all'opposito si dovrà ai detti prodotti prefiggere il segno —, se una delle parti, dalle quali è formato, avrà il segno +, l'altra il segno —; il tutto a norma delle regole date (§. 10.)

41. Dalla tavola delle potestà (§. 38.) si comprende pure, che il cubo d'una quantità di due termini, come $a + b$, contiene il cubo del primo termine, tre quadrati del primo termine moltiplicati pel secondo, tre quadrati del secondo moltiplicati pel primo, ed il cubo del secondo termine. Per la qual cosa, considerando una quantità di tre termini $a + b + c$ come composta di due soli termini, de' quali uno sia $a + b$, ed il secondo sia c, il cubo di tale quantità conterrà il cubo di $a + b$, che si considera come primo termine, tre quadrati di questo primo moltiplicati pel secondo c, tre quadrati del secondo termine moltiplicati pel primo $a + b$,

ed il cubo del ſecondo; ma il cubo del primo termine $a + b$ contiene il cubo di a, tre quadrati del primo moltiplicati pel ſecondo b, tre quadrati del ſecondo moltiplicati pel primo, ed il cubo del ſecondo; perciò il cubo della quantità $a + b + c$ contiene il cubo del primo termine, tre quadrati del primo moltiplicati pel ſecondo, tre quadrati del ſecondo moltiplicati pel primo, il cubo del ſecondo, tre quadrati dei due primi termini moltiplicati pel terzo, tre quadrati del terzo moltiplicati per li due primi, ed il cubo del terzo.

Parimenti, conſiderando una quantità di quattro termini $a + b + c + d$, come ſe foſſe compoſta di due termini, dei quali uno ſia $a + b + c$, l'altro ſia d, il cubo di tale quantità conterrà il cubo del primo termine, tre quadrati del primo moltiplicati pel ſecondo, tre quadrati del ſecondo moltiplicati pel primo, il cubo del ſecondo, i tre quadrati della ſomma dei due primi moltiplicati pel terzo, tre quadrati del terzo moltiplicati per la ſomma dei due primi, il cubo del terzo, tre quadrati della ſomma dei tre primi termini moltiplicati pel quarto, tre quadrati del quarto moltiplicati per la ſomma dei tre primi, il cubo del quarto.

Generalmente adunque, ſe s' avrà una quantità di cinque, di ſei ec. termini, il cubo di quella, che ne ha cinque, conterrà, oltre il cubo dei quattro primi termini, tre quadrati della ſomma dei quattro primi moltiplicati pel quinto, i tre quadrati del quinto moltiplicati per la ſomma dei quattro primi, con il cubo del quinto. Il cubo poi di quella, che ha ſei termini, conterrà, oltre il cubo dei cinque primi, tre quadrati della ſomma dei cinque primi moltiplicati per lo ſeſto, tre quadrati del ſeſto moltiplicati per la ſomma dei cinque primi, con il cubo del ſeſto; e così ſeguitando, ſe s' aveſſe una quantità di un maggior numero di termini.

42. Occorrendo che uno, o più termini della quantità abbiano il ſegno —, i cubi di tali termini dovranno altresì avere il ſegno —. I prodotti poi, che ſi faranno moltiplicando un termine per un'altro, avranno il ſegno, che ſi compete a tenore della regola data (§. 10.)

43. Collo ſteſſo metodo ſi potrà venire in cognizione dei prodotti appartenenti alla quarta, quinta ec. poteſtà di una quantità, che abbia più di due termini.

Dell' estrazione delle radici dalle quantità composte.

44. Per estrarre la radice dalle quantità composte, si devono prima d' ogni cosa ordinare i termini di esse relativamente ad una qualche lettera, il che si fa ponendo per primo termine quello, in cui tale lettera ha la potestà maggiore, che in qualsivoglia altro termine della quantità proposta, per secondo termine quello, in cui la medesima lettera ha la potestà più prossima alla maggiore, e così successivamente si disporranno gli altri termini fino a quello, che più non contiene essa lettera.

45. Debbasi estrarre la radice quadrata dalla quantità $2ab + b^2 + a^2$. Si ordineranno i termini di questa secondo una d' esse due lettere, e per esempio per a, e si avrà $a^2 + 2ab + b^2$. Ciò fatto si rifletta, che il quadrato di una quantità composta di due termini (§. 39.) è costituito dal quadrato del primo termine, dal prodotto, che si fa dal doppio del primo termine moltiplicato pel secondo, e dal quadrato del secondo. Avendo pertanto presente questo teorema, si cavi la radice quadrata dal primo ter-

mine $a a$, e ſarà a, la quale ſi ſcriverà alla ſiniſtra della quantità propoſta, e ſarà il primo termine della radice ricercata; indi ſi ſottragga il quadrato di a dalla quantità propoſta, e corretta l'eſpreſſione s' avrà di reſiduo $2 a b + b b$; dividaſi il ſecondo termine $2 a b$ per $2 a$, che è il doppio del primo termine della radice, il quoziente $+ b$ ſarà il ſecondo termine d' eſſa radice, il quale moltiplicato pel diviſore $2 a$ darà il prodotto $2 a b$, e queſto ſottratto dall' avanzo $2 a b + b b$ della quantità propoſta s' avrà di rimanente b^2, ſi quadri il ſecondo termine della radice, e ſi ſottri queſto quadrato dal diviſato avanzo, e ſi vedrà, che non rimarrà più nulla; e però $a + b$ ſarà la radice ricercata.

Debbaſi parimente eſtrarre la radice quadrata dalla quantità $4 a^4 - 16 a a b + 12 a a c + 16 b b - 24 b c + 9 c c$, la quale è già ordinata relativamente alla lettera a; ſi eſtragga la radice quadrata dal primo termine $4 a^4$, e s'avrà $2 a^2$, che ſarà la prima parte della radice; ſottraggaſi il quadrato di $2 a^2$, cioè $4 a^4$ dalla quantità propoſta, indi dividaſi il primo termine $- 16 a a b$ del rimanente $- 16 a a b + 12 a a c + 16 b b - 24 b c + 9 c c$ per $4 a^2$, che è il doppio della prima parte

della radice, e s' avrà $-4b$ di quoziente, che ſarà un' altro termine della radice ricercata: dappoi moltiplicato il quoziente $-4b$ pel diviſore $4aa$, e fatto il quadrato del medeſimo quoziente, s'avrà la quantità $-16a^2b+16bb$, che ſottratta dal rimanente $-16a^2b+12aac+16bb-24bc+9cc$, s' avrà di reſiduo $+12aac-24bc+9cc$: ſi divida il primo termine $12aac$ d' eſſo reſiduo per $4a^2$, che è il doppio del primo termine della radice, e s'avrà il quoziente $3c$, che ſarà altresì un' altro termine della radice: poſcia ſi moltiplichi $4aa-8b$, cioè il doppio dei due termini della radice già ritrovati, pel quoziente $3c$, e s'avrà il prodotto $12aac-24bc$, che col quadrato di $3c$ darà la quantità $12aac-24bc+9cc$, e perchè queſta ſottratta dall' ultimo reſiduo della quantità propoſta nulla più rimane, così ſarà $2aa-4b+3c$ la radice ricercata (§. 39.)

46. Ma, ſe la quantità propoſta foſſe ſtata $4a^4-16aab+12aac+16bb-24bc+9cc+d^2$, dimodochè fatte le diviſate ſottrazioni ſi aveſſe di reſiduo il termine d^2, il quale non è diviſibile per $4a^2$, in ſimil caſo ſi dee conchiudere, che dalla propoſta quantità non ſi può

estrarre la radice ricercata; onde per indicare tale radice si porrà il segno radicale avanti la proposta quantità, di modo che esso segno s'estenda sopra tutti i termini della medesima

$$\sqrt{4a^4 - 16aab + 12aac + 16bb - 24bc + 9cc + d^2}$$

47. Per estrarre la radice cubica da una quantità composta, se ne ordineranno i termini a norma del §. 44, indi si rifletterà, che il cubo di una qualsivoglia quantità composta di due termini contiene il cubo del primo termine, tre quadrati del primo termine moltiplicati pel secondo, tre quadrati del secondo moltiplicati pel primo, ed il cubo del secondo. (§.41.)

48. Debbasi estrarre la radice cubica dalla quantità $a^3 + b^3 + 3\,bba + 3\,aab$. Se ne ordinino i termini relativamente ad una d'esse lettere, e per esempio alla lettera a, e s'avrà $a^3 + 3\,a^2b + 3\,b^2a + b^3$, indi, avendo presente il teorema dell'antecedente paragrafo, si cavi la radice cubica del primo termine a^3, che è a, e sarà questo il primo termine della radice ricercata. Dappoi sottraggasi dalla quantità proposta il cubo di a, che è a^3, e s'avrà di rimanente $3\,aab + 3\,abb + b^3$; ma siccome dalla quantità proposta si è già

levato il cubo del primo termine, il rimanente $3aab + 3abb + b^3$ conterrà ancora tre quadrati del primo termine moltiplicati pel ſecondo, tre quadrati del ſecondo moltiplicati pel primo, ed il cubo del ſecondo. Perciò dividaſi il primo termine $3aab$ d'eſſo rimanente per $3aa$, che è il triplo quadrato del primo termine della radice, il quoziente b ſarà il ſecondo termine della radice; in oltre ſi moltiplichi $3aa$ triplo del quadrato del primo termine della radice pel ſecondo b, s'avrà $3aab$; ſi moltiplichi ancora $3bb$, che è il triplo quadrato del ſecondo termine pel primo a, s'avrà $3bba$, a queſti prodotti aggiungaſi b^3 cubo del ſecondo termine b, s'avrà la quantità $3aab + 3bba + b^3$, la quale ſottratta dall' avanzo $3aab + 3bba + b^3$ della quantità propoſta, nulla più vi rimane: ſicchè ſarà $a + b$ la radice ricercata.

Similmente ſia ordinata ſecondo la lettera a la quantità $36a^2b - 12a^2x + 8a^3 + 54ab^2 + 6ax^2 - 36abx + 27b^3 + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$, da cui ſi dee eſtrarre la radice cubica, ſarà $8a^3 + 36a^2b - 12a^2x + 54ab^2 + 6ax^2 - 36abx + 27b^3 + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$: ſi cavi la radice cubica dal primo termine $8a^3$,

che sarà $2a$, e sottratto il cubo di questa dalla quantità proposta, s' avrà di rimanente $36a^2b - 12a^2x + 54ab^2 + 6ax^2 - 36abx + 27b^3 + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$: piglisi il triplo quadrato di $2a$, che è $12a^2$, indi per questo dividasi il primo termine $36a^2b$ del rimanente, ed il quoziente $3b$ sarà il secondo termine della radice; sottraggasi in oltre dal rimanente della proposta quantità il triplo prodotto, che si fa dal quadrato del primo termine $2a$ della radice moltiplicato pel secondo $3b$, il triplo prodotto fatto dal quadrato del secondo termine moltiplicato pel primo, ed il cubo del secondo; cioè $36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$, e s' avrà di residuo $- 12a^2x + 6ax^2 - 36abx + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$; di nuovo dividasi il primo termine $12a^2x$ dell' avanzo per $12a^2$ triplo quadrato del primo termine della radice, ed il quoziente $-x$ sarà il terzo termine della radice; e perchè dal residuo $- 12a^2x + 6ax^2 - 36abx + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$ levando $- 12a^2x + 6ax^2 - 36abx + 9bx^2 - x^3 - 27b^2x$, cioè il triplo prodotto, che si fa dal quadrato dei due primi termini moltiplicato pel terzo, il triplo prodotto fatto dal quadrato del terzo moltiplicato per li due primi, ed

il cubo del terzo, nulla rimane da tale ſottrazione, così ſarà $2a + 3b - x$ la ricercata radice.

49. Se poi, fatta l' ultima ſottrazione, ſi avrà ancora un qualche avanzo, che non ſarà diviſibile per $12a^2$ triplo quadrato del primo termine, allora ſarà ſegno, che dalla propoſta quantità non ſi può eſtrarre la radicè ricercata; nel qual caſo ſi dovrà indicare col ſegno radicale, che ſi eſtenda ſopra tutti i termini della quantità propoſta, ſcrivendo l' indice 3 ſopra il ſegno ſuddetto.

50. Per eſtrarre la radice quarta da una qualche quantità compoſta ſi ordineranno pure i termini di quella ſecondo una qualche lettera; indi ſi rifletterà, che la quarta poteſtà di una qualſivoglia quantità compoſta di due termini contiene la quarta poteſtà della prima parte, il quadruplo del prodotto, che ſi fa dal cubo della prima moltiplicato per la ſeconda, il ſeſtuplo prodotto fatto dal quadrato della prima moltiplicato pel quadrato della ſeconda, il quadruplo prodotto, che ſi fa dal cubo della ſeconda moltiplicato per la prima, e finalmente la quarta poteſtà della ſeconda (§. 38.). Sicchè, ſe ſia propoſta la quantità $d^4 + 4d^3f + 6d^2f^2 + 4df^3 + f^4$

ordinata ſecondo la lettera d, da cui ſi debba cavare la radice quarta, avendo preſente il teorema ſuddetto, ſi comincerà a cavare la quarta radice dal primo termine d^4, e s' avrà d, che ſarà la prima parte della radice, e quindi dalla quantità propoſta ſottratto d^4, cioè la quarta poteſtà della prima parte della radice, ſi dividerà il primo termine $4d^3f$ dell'avanzo pel cubo quadruplicato d' eſſa prima parte, cioè per $4d^3$, e il quoziente f ſarà la ſeconda parte della radice, e ſottratto indi dal detto avanzo $4d^3 + 6d^2f^2 + 4df^3 + f^4$ il quadruplo prodotto, che ſi fa dal cubo della prima parte moltiplicato per la ſeconda, il ſeſtuplo prodotto fatto dal quadrato della prima moltiplicato pel quadrato della ſeconda, il quadruplo prodotto, che ſi fa dalla prima moltiplicata pel cubo della ſeconda; e finalmente la quarta poteſtà della ſeconda, ſiccome nulla più rimane, così ſarà $d + f$ la ricercata radice.

51. Che ſe da tale ſottrazione rimarrà un qualche reſiduo, che non ſarà diviſibile per $4d^3$, allora dalla propoſta quantità non ſi potrà eſtrarre la radice ricercata, nel qual caſo ſi dovrà indicare col ſegno radicale, che ſi eſtenda ſopra tutti i ter-

mini della quantità propoſta, e ſi ſcriverà l'indice 4 ſopra il ſegno ſuddetto.

52. Praticando lo ſteſſo metodo, ſi potrà coll'uſo della tavola delle poteſtà (§.38.) eſtrarre qualſivoglia radice da qualunque quantità propoſta.

53. Se poi la quantità, da cui ſi dee eſtrarre la radice, ſarà una frazione, in tal caſo ſi dovrà eſtrarre la radice tanto dal numeratore, quanto dal denominatore; la radice, che ſi otterrà dal numeratore, ſarà il numeratore, e la radice, che ſi caverà dal denominatore, ſarà il denominatore della radice ricercata. E però $\frac{a-d}{b+c}$ ſarà la radice quadrata del rotto $\frac{a^2-2ad+d^2}{b^2+2bc+c^2}$; la radice cubica di $\frac{c^3+3c^2f+3cf^2+f^3}{m^3-3m^2p+3mp^2-p^3}$ ſarà $\frac{c+f}{m-p}$; e così di altri.

Occorrendo poi, che non ſi poſſa eſtrarre la radice dal numeratore, o dal denominatore, ſi indicherà la medeſima col ſegno radicale, e così la radice quadrata di $\frac{c^2-mn}{a^2+2ad+d^2}$ ſarà $\frac{\sqrt{c^2-mn}}{a+d}$, la radice cubica di $\frac{f^3-3f^2h+3fh^2-h^3}{a^3+4c^2d}$ ſarà $\frac{f-h}{\sqrt[3]{a^3+4c^2d}}$.

Finalmente, ſe non ſi potrà cavare la ra-

dice nè dal numeratore, nè dal denominatore, la gamba del ſegno radicale dovrà eſtenderſi ſotto, e ſopra, e così la radice quinta del rotto $\frac{b^4 c - 3 c^3 d^2}{f^2 m^3 + 8 d^4 n}$ ſarà

$$\sqrt[5]{\frac{b^4 c - 3 c^3 d^2}{f^2 m^3 + 8 d^4 n}}.$$

Del Calcolo degli Eſponenti delle quantità compoſte.

54. Nel calcolo degli eſponenti delle quantità compoſte in vece d'inalzare colla moltiplicazione la quantità a qualche poteſtà, rieſce talvolta più ſpediente tirare una linea, che s' eſtenda ſopra tutti i termini di quella, col porre alla dritta d' eſſa linea un numero, che indichi a quale poteſtà la quantità propoſta dee eſſere inalzata. Sicchè per indicare la prima poteſtà di $a + b$ ſi ſcriverà $\overline{a + b}^1$, per indicare la ſeconda poteſtà ſi ſcriverà $\overline{a + b}^2$, per indicare la terza poteſtà ſi ſcriverà $\overline{a + b}^3$, e così $\overline{a + b}^4$ indicherà la quarta ec.

55. Dall' addotta maniera di eſprimere le poteſtà di una quantità compoſta ſi

ſcorge, che a queſte ſi poſſono applicare le medeſime regole date pel calcolo degli eſponenti delle quantità ſemplici, di ſorta che per rappreſentare il prodotto della poteſtà $\overline{a+b}^2$ moltiplicato per $\overline{a+b}^4$ ſi ſommerà l'eſponente 2 della poteſtà $\overline{a+b}^2$ coll' eſponente 4 della poteſtà $\overline{a+b}^4$, e la ſomma 6 ſarà l'eſponente del prodotto, di modo che tale prodotto ſarà $\overline{a+b}^6$.

Per dividere la poteſtà $\overline{a+b}^7$ per la poteſtà $\overline{a+b}^3$ ſi leverà l'eſponente 3 del diviſore $\overline{a+b}^3$ dall' eſponente 7 del dividendo $\overline{a+b}^7$, ed il rimanente 4 ſarà l'eſponente del quoziente, e s' avrà $\overline{a+b}^4$, che ſarà il quoziente ricercato.

Per inalzare la poteſtà $\overline{a+b}^2$ alla terza poteſtà, ſi moltiplicherà l' eſponente 2 della poteſtà $\overline{a+b}^2$ per 3, ed il prodotto 6 ſarà l' eſponente della terza poteſtà di $\overline{a+b}^2$: ſicchè la poteſtà ricercata ſarà $\overline{a+b}^4$.

Per estrarre la radice quarta della potestà $\overline{a+b}^{8}$ si scriverà $\overline{a+b}^{2}$, dividendo l'esponente 8 per 4.

Siccome dividendo $\overline{a+b}^{2}$ per se stesso si ha di quoziente $\overline{a+b}^{0}$, dividendo $\overline{a+b}^{0}$ per $\overline{a+b}^{1}$ si ha $\overline{a+b}^{-1}$; e dividendo $\overline{a+b}^{0}$ per $\overline{a+b}^{2}$ si ha $\overline{a+b}^{-2}$, e dividendo $\overline{a+b}^{0}$ per $\overline{a+b}^{3}$ si ha $\overline{a+b}^{-3}$ ec., così seguitando la divisione in questa maniera si viene ad avere una serie di potestà, i cui esponenti sono tutti negativi.

Affine poi di ridurre la potestà $\overline{a+b}^{-3}$ in modo, che il suo esponente resti positivo, si scriverà $\frac{1}{\overline{a+b}^{3}}$, e per trasformare altresì la quantità $q \times \overline{a+b}^{-3}$ in modo, che l' esponente -3 resti positivo, si scriverà $\frac{q}{\overline{a+b}^{3}}$.

Per trasformare poi la potestà $\overline{a+b}^{4}$ in modo, che il suo esponente resti negativo, si scriverà $\frac{1}{\overline{a+b}^{-4}}$, e per trasformare la quantità $c \times \overline{a+b}^{2}$, si scriverà $\frac{c}{\overline{a+b}^{-2}}$.

Per

Per rappreſentare la radice quarta della quantità $\overline{a+b}^3$ ſi ſcriverà $\overline{a+b}^{\frac{3}{4}}$, e così di altre a norma delle regole già date.

CAPO III.

Dell' Eſtrazione delle radici dai numeri.

56. La tavola delle poteſtà regiſtrata (§. 38.) ſomminiſtra le regole, o dicanſi formole per eſtrarre qualſivoglia radice dai numeri. La poteſtà $a^2 + 2ab + b^2$ ſerve di norma per eſtrarre la radice quadrata da un propoſto numero, la poteſtà $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ſomminiſtra la formola per eſtrarne la radice cubica, e così le altre poteſtà ſucceſſive ſervono per eſtrarre la radice quarta, quinta ec.

Per valerſi di queſte formole è neceſſario ſeparare con alcuni punti i caratteri del numero propoſto, principiando dalla deſtra, e tendendo verſo la ſiniſtra. Se ſi vorrà eſtrarre la radice quadrata, i caratteri ſi ſepareranno da due in due, ſe ſi dovrà eſtrarre la radice cubica, i caratteri ſi ſegneranno da tre in tre, e ſi noteranno da quattro in quattro eſſi caratteri, ſe ſi dovrà eſtrarre la radice quar-

ta, e così progreſſivamente per eſtrarre altre radici di grado ſuperiore.

In ſecondo luogo fa di meſtiere ſapere a memoria le diverſe poteſtà dei numeri ſemplici, principiando dal due ſino al nove incluſivamente.

Nella tavola ſeguente ſono regiſtrate le poteſtà dei diviſati numeri dalla ſeconda ſino alla quinta poteſtà, e ſarà facile di eſtendere eſſa tavola alle altre poteſtà di un grado ſuperiore.

Numeri naturali	*Poteſtà.*			
	2.da	3.za	4.ta	5.ta
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049

Estrarre la radice quadrata da un numero proposto.

57. Debbasi estrarre la radice quadrata dal numero 4096.

64	4096
12	36
	49
	16
	16
	==

Se ne separino con punti li caratteri da due in due, principiando dalla destra, e venendo alla sinistra; e siccome due punti risultano in questa separazione, così due essere dovranno le cifre nella radice, che si scriverà a sinistra di una linea tirata a lato del proposto numero. Ciò fatto, si consideri, che nella seconda potestà (§.38.) $a^2 + 2ab + b^2$ la lettera a indica la prima cifra della radice, e b la seconda cifra, e si conoscerà tosto, che dal proposto numero si dee cavare alla sinistra il quadrato della prima cifra espresso per a^2, e che venendo verso la destra si dee estrarre il doppio prodotto della prima cifra nella seconda espresso per $2ab$, e finalmente il quadrato b^2 della seconda (§. 38., e 39.): e però dicasi il maggior quadrato

contenuto nei caratteri 40, che ſono nella prima ſeparazione a ſiniſtra, egli è 36, la cui radice è 6, che ſi ſcriverà nel ſito deſtinato per regiſtrarvi la radice. Sottraggaſi il quadrato 36 da 40, e a deſtra dell' avanzo 4 ſi abbaſſi il 9 terzo carattere del numero propoſto, che così s'avrà 49, il quale diviſo pel doppio della prima cifra 6, cioè per 12, darà di quoziente 4 per la ſeconda cifra della radice corriſpondente alla lettera *b*: ſi ſottri indi da 49 il doppio prodotto di 6 in 4, cioè 48, ed abbaſſato 6 ultimo carattere del propoſto numero a lato dell' avanzo 1, ſi avrà 16, dal quale ſottratto il quadrato di 4 della ſeconda cifra, nulla più rimarrà da queſta operazione; onde 64 ſarà la radice quadrata del propoſto numero.

58. Occorrendo, che la ſeconda cifra della radice, la quale ricavaſi dalla diviſione, foſſe tale, che non ſi poteſſero cavare il doppio prodotto della prima nella ſeconda, ed il quadrato di queſta, in ſimil riſcontro ſi diminuirà eſſa ſeconda cifra di una, o più unità, fino a tanto che ſi poſſano ſottrarre i diviſati prodotti, come ſi può oſſervare in queſt' altro eſempio.

Debbaſi eſtrarre la radice quadrata dal numero 148225.

385	148225
6	9
76	58
	48
	102
	64
	382
	380
	25

Separati i caratteri con punti da due in due risultano tre punti, e quindi si inferisce doversi avere tre cifre alla radice. Continuando a servirsi della formola per la seconda potestà (§. 39.), e avendo presenti le riflessioni fatte, dicasi, il maggior quadrato contenuto nei caratteri 14, prima separazione a sinistra, egli è 9, la cui radice è 3, che si scriverà nel sito per essa stabilito, e sottratto indi esso quadrato 9 da 14, s'avrà 5 d'avanzo, al cui fianco si scriverà il terzo carattere 8 del proposto numero, e s'avrà 58, il quale diviso per 6 doppio prodotto della prima cifra 3 dà 9 di quoziente; ma siccome nel sottrarre da 58 il doppio prodotto della prima nella seconda cifra si ha solamente 4 d'avanzo, e che coll'ab-

bassare il 2 quarto carattere del proposto numero più non si può da 42 sottrarre 81, che è il quadrato di 9, così si scriverà 8 per la seconda cifra della radice, giacchè con questa si possono sottrarre i divisati prodotti.

Sottratto pertanto 48 doppio prodotto della prima nella seconda cifra si ha 10 d' avanzo, a lato del quale si scriverà il 2 quarto carattere del numero proposto, e s' avrà 102, dal quale sottratto 64 quadrato di 8, s' otterrà l' avanzo 38. S' abbassi indi a lato di questo il quinto carattere 2, e s' avrà 382. Si considerino ora le due prime cifre 38 della radice rappresentate per a della formola della seconda potestà; siccome per mezzo delle operazioni già fatte si è cavato il quadrato della prima cifra, il doppio prodotto della prima nella seconda, ed il quadrato della seconda, il che tutto costituisce il quadrato delle due prime cifre (§. 39.), così converrà adesso cavare il doppio prodotto d' esse due prime cifre nella terza, ed il quadrato della terza. Per trovare adunque la terza cifra, basta dividere 382 pel doppio di 38, cioè per 76, e scrivere il quoziente 5 alla radice; sottratto pertanto dal 382 il doppio prodotto 380 della ter-

za cifra nelle due prime, s' avrà di residuo 2, al fianco del quale s' abbasserà l' ultimo carattere 5 del proposto numero, e s' avrà 25, dal quale sottratto il quadrato di 5 non rimarrà più nulla; onde 385 sarà la radice quadrata del proposto numero.

Collo stesso metodo si procederà, allorchè, dopo d' aver fatta per mezzo dei punti la separazione dei caratteri di due in due nel numero proposto, si troverà, che la radice dee avere quattro, cinque ec. cifre, essendo tutte queste operazioni fondate sulla teoría spiegata (§. 39.)

59. Per estrarre la radice quadrata da un rotto, converrà cavarla separatamente dal numeratore, e dal denominatore nel modo spiegato, e scrivere la radice del numeratore per numeratore, e quella del denominatore per denominatore (§. 53.). Operando in questa conformità si troverà, che la radice quadrata di $\frac{169}{576}$ ella è $\frac{13}{24}$, che la radice quadrata di $\frac{1521}{2209}$ è $\frac{39}{47}$.

Se poi il numero, da cui si dee estrarre la radice, sarà un intero congiunto con un rotto, si ridurrà l' intero in forma di rotto, dopo del che si opererà come so-

pra, e così, se si dee estrarre la radice quadrata da 28 $\frac{4}{9}$, ridotto questo numero in forma di rotto, s'avrà $\frac{256}{9}$, la cui radice è $\frac{16}{3}$, o dicasi 5 $\frac{1}{3}$, la radice quadrata di 4 $\frac{29}{49}$, riducendo questo numero in forma di rotto, sarà $\frac{225}{49}$, la cui radice è $\frac{15}{7}$, o dicasi 2 $\frac{1}{7}$.

Estrarre la radice cubica da un numero.

60. Per estrarre la radice cubica da un numero convien valersi della terza potestà $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ per formola, e indi segnare con punti da tre in tre i caratteri del numero proposto, principiando a destra, e venendo verso la sinistra, ed aver presenti le riflessioni eccitate (§.41.). Il numero delle separazioni indicherà quante cifre si avranno alla radice.

Debbasi estrarre la radice cubica dal numero 157464.

54	157464
75	125
	324
	300
	246
	240
	64

Dopo d' averne separati i caratteri da tre in tre si troveranno due separazioni, e quindi due essere dovranno le cifre nella radice, la prima delle quali sarà rappresentata per la lettera a della formola $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, e l' altra per b. Ora, poichè il cubo della prima cifra è incluso nei tre primi caratteri a sinistra, cioè nel 157, si dica, il maggior cubo contenuto in 157 egli è 125, la cui radice è 5; scrivasi 5 alla radice, e si sottri il cubo 125, e s' avrà di residuo 32, a lato del quale s' abbasserà il quarto carattere 4 del numero proposto, e s' avrà 324. Dividasi 324 pel triplo quadrato di 5, cioè per 75, e si scriva il quoziente 4 per la seconda cifra della radice; indi da 324 si sottri 300, che è il prodotto di 75 per 4, ed a fianco dell' avanzo 24 s'abbassi il 6 penultimo carattere del proposto

numero, e s'avrà 246, da questo si sottri il triplo prodotto fatto dal quadrato di 4 nella prima cifra 5, cioè 240, e s' avrà 6 d'avanzo, al cui lato scrivendo l' ultimo carattere 4 del numero proposto, s' avrà 64, dal quale sottratto il cubo della seconda cifra della radice si troverà, che nulla più rimane; e però 54 sarà la radice cubica del proposto numero.

61. Occorrendo, che il quoziente, il quale si ricava dalla divisione per avere la seconda, la terza ec. cifra della radice, fosse maggiore di ciò esigesi per fare le mentovate sottrazioni, si scriverà esso quoziente diminuito di una, o più unità, finchè basti per fare tutte le sottrazioni, come si osserva nel seguente esempio.

Sia proposto il numero 21717639, da cui si debba estrarre la radice cubica.

```
279   | 21717639
12        8
----    ---
2187    137
         84
        ---
        531
        294
        ---
        2377
         343
        ----
        20346
        19683
        -----
        ::6633
          6561
          ----
          ::729
          : :
```

Fatta la solita separazione coi punti, si trova, che tre esser debbono le cifre alla radice; indi si dica, il maggior cubo contenuto in 21, prima separazione a sinistra, egli è 8, la cui radice è 2 da scriversi nel sito per essa assegnato, e sottratto 8 da 21 si ha 13 di residuo, al cui fianco si dee scrivere 7 terzo carattere del numero proposto per avere 137, il quale diviso per 12 triplo quadrato della prima cifra della radice, si ha 9 di quoziente per la seconda cifra della radice; ma perchè questo numero è troppo grande per

poterne poi estrarre i soliti prodotti, e che lo stesso succede, se si scrive il numero 8, così si scriverà 7 per la seconda cifra della radice, indi si sottrerrà 84 triplo prodotto del quadrato della prima cifra della radice nella seconda, e a fianco dell' avanzo 53 s' abbasserà l' unità quarto carattere del numero proposto, e s' avrà 531, dal quale si leverà 294 triplo prodotto del quadrato di 7 nella prima cifra 2 della radice, ed a lato dell'avanzo 237 si abbasserà il 7 quinto carattere del proposto numero, e da 2377 si caverà il cubo di 7, cioè 343, e si avrà di residuo 2034, al cui fianco s'abbasserà il 6 sesto carattere del numero proposto.

Siccome i prodotti parziali ricavati nelle operazioni fin quì fatte costituiscono il cubo delle due prime cifre della radice, e che nel proposto numero si hanno ancora tre prodotti fatti dal quadrato delle due prime cifre 27 della radice nella terza cifra, tre prodotti fatti dal quadrato della terza cifra nelle due prime, ed il cubo della terza cifra (§. 41.), così per avere essa terza cifra si dividerà l' avanzo 20346 per 2187 triplo prodotto del quadrato di 27, ed il quoziente 9 si scriverà alla radice. Dall' avanzo 20346 si sottri

19683 triplo prodotto fatto dal quadrato 27 nel numero 9, e s'avrà di residuo 663, al cui lato s' abbassi il 3 penultimo carattere del numero proposto, e s'avrà 6633, da cui sottratto 6561 triplo prodotto fatto dal quadrato di 9 per 27, s' avrà 72 di residuo, e collo abbassare 9 ultimo carattere del numero proposto, s' avrà 729, dal quale sottratto il cubo di 9, nulla più rimarrà; onde 279 sarà la radice cubica di 21717639.

62. Per estrarre la radice cubica da un rotto si caverà la radice tanto dal numeratore, quanto dal denominatore, e la radice del numeratore sarà il numeratore, e quella del denominatore sarà il denominatore; e così la radice cubica di $\frac{27}{125}$ sarà $\frac{3}{5}$, e quella di $\frac{64}{343}$ sarà $\frac{4}{7}$.

Se poi il numero, da cui si dee estrarre la radice, sarà un intero congiunto con un rotto, si ridurrà l' intero in forma di rotto, indi si opererà come sovra, e così la radice cubica di $4\frac{17}{27}$, o dicasi $\frac{125}{27}$ sarà $\frac{5}{3}$, o pure $1\frac{2}{3}$; la radice cubica di $3\frac{81}{216}$, o sia $\frac{729}{216}$ sarà $\frac{9}{6}$, o dicasi $1\frac{1}{2}$.

Estrarre da un numero la radice di grado superiore al terzo.

63. La regola data (§. 56.) per estrarre qualsivoglia radice, essendo generalissima, basterà farne vedere l' applicazione a qualche caso particolare, che non sia in uso presso gli Aritmetici. Debbasi estrarre la quinta radice dal numero 147008443, se ne separeranno i caratteri da cinque in cinque coi soliti punti, e siccome due sole separazioni risultano, così due saranno le cifre della radice.

```
  43  | 147008443
 1280   1024
        4460
        3840
        :6208
         5760
        :4484
         4320
          1644
          1620
         ==243
```

Si prenda la quinta potestà (§. 38.) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$,

e ſervendoſi di queſta per norma, ed avendo a memoria la tavola (§. 56.) dicaſi, la maggior quinta poteſtà contenuta nei caratteri della prima diviſione a ſiniſtra ella è 1024, la cui radice è 4, che ſi ſcriverà nel ſito della radice, e ſottratto indi 1024 da 1470, s'avrà 446 di reſiduo, ed abbaſſato il zero quinto carattere del numero propoſto, s'avrà 4460, il quale diviſo per 1280, che è il prodotto della quarta poteſtà di 4 per 5, cioè $5a^4$, dà 3 di quoziente ſeconda cifra eſpreſſa per b nella radice; ſi ſottri da 4460 il numero 3840, che è il prodotto di 1280 per 3, additato per $5a^4b$, s'avrà d'avanzo 620, a lato del quale s'abbaſſi 8 ſeſto carattere del numero propoſto, e s'avrà 6208, dal quale ſottratto 5760 prodotto del cubo di 4 per dieci volte il quadrato di 3 corriſpondente al termine $10a^3b^2$, s'avrà d'avanzo 448, al lato del quale s'abbaſſerà il ſettimo carattere 4 del propoſto numero, e s'avrà 4484, da cui ſi eſtrarrà 4320 prodotto fatto da dieci volte il quadrato della prima cifra nel cubo della ſeconda, additato eſſo prodotto da $10a^2b^3$, e s'avrà il reſiduo 164, a lato del quale s'abbaſſerà l'ottavo carattere 4 del propoſto numero, e s'avrà 1644, da

cui ſottratto 1620, che è il quintuplo prodotto fatto dalla prima cifra nella quarta poteſtà della ſeconda, eſpreſſo per $5ab^4$, ſi ha 24 d' avanzo, al cui fianco abbaſſato l' ultimo carattere 3 ſi ha 243, dal quale levando la quinta poteſtà della ſeconda cifra 3 della radice, ſi trova, che nulla più rimane dal propoſto numero; onde 43 ſarà la quinta radice ricercata.

64. Nella ſteſſa maniera ſi dovrà operare per eſtrarre le radici indicate dagli altri numeri primi, vale a dire dai numeri, che non poſſono eſſere miſurati fuorchè dall' unità, come ſono 7, 11, 13, 17, 19, 23 ec.; ma riſpetto alle radici indicate da numeri compoſti, come ſono 4, 6, 8, 10, 12, 16 ec., queſte ſi potranno eſtrarre in una maniera più ſemplice mediante la teoria ſpiegata (§. 30.), ove s' è dimoſtrato, che per eſtrarre la radice da una qualche poteſtà ſi dee dividere l' eſponente della poteſtà pel numero, che indica la radice, che ſi vuol eſtrarre, ed il quoziente ſomminiſtra l' eſponente della radice ricercata; ciò poſto, debbaſi eſtrarre la radice quarta dal numero 1500625, ſe in vece di valerſi della formola appartenente alla quarta poteſtà ſi conſidererà il numero propoſto come una

quarta

quarta poteſtà, il cui eſponente 4, eſſendo diviſo per 2 indice della ſeconda poteſtà, ſomminiſtra 2 di quoziente per l'eſponente della radice, ſi vedrà toſto, che, eſtraendo dal numero propoſto la radice quadrata, s'avrà 1225, che ſarà la ſeconda poteſtà della quarta radice, che ſi cerca, e quindi, eſtraendo da 1225 pure la radice quadrata, s'avrà 35, che ſarà la radice quarta del propoſto numero 1500625.

Parimente, ſe in vece di eſtrarre a dirittura la radice ſeſta dal numero 191102976, ſi conſidererà come una ſeſta poteſtà, il cui eſponente 6 è diviſibile per 2, e per 3, ſi vedrà toſto, che, eſtraendo dal propoſto numero la radice cubica, s'avrà 576, che ſarà la ſeconda poteſtà della radice ſeſta, e quindi, eſtraendo la radice quadrata da 576, s'avrà 24 per la radice ſeſta ricercata; comprendendoſi pure, che ſi otterrà la medeſima radice 24, ſe dal propoſto numero ſe ne eſtrarrà primieramente la radice quadrata, che è 13824, e da queſta ſi eſtrarrà la radice cubica.

Procedendo collo ſteſſo metodo, in vece di eſtrarre a dirittura la radice ottava da un propoſto numero, ſi comincerà a cavare la radice quadrata, la quale ſarà

una quarta poteſtà, da cui ſi eſtrarrà la radice quadrata, e da queſta radice, che ſarà una ſeconda poteſtà, ſi eſtrarrà ancora la radice quadrata, e queſta ſarà la radice ottava ricercata. E così ancora in vece di eſtrarre a dirittura da un numero propoſto la radice nona, ſi eſtrarrà la radice cubica, la quale eſſendo una terza poteſtà, ſi eſtrarrà ancora da queſta la radice cubica, e s' avrà la radice nona ricercata; e così ancora, ſe da un numero ſi dovrà eſtrarre la radice decima, ſi principierà ad eſtrarre la radice quadrata, e da queſta ſi caverà poi la radice quinta; o pure ſi eſtrarrà a dirittura la radice quinta dal numero propoſto, e dalla radice quinta ſi caverà la radice quadrata, e queſta ſarà la radice decima del numero propoſto, e così di altre ec.

65. Se ſi dovranno eſtrarre radici di grado ſuperiore da un qualche rotto, o da numeri interi congiunti con rotti, baſterà regolarſi a norma delle coſe dette (§.59,62.) per l' eſtrazione della radice quadrata, e della cubica.

Estrarre per approssimazione le radici dai numeri.

66 Le radici, che come sovra si sono cavate dai numeri, si chiamano *Commensurabili*, o *Razionali*; ma se, dopo d'aver fatte tutte le avanti descritte operazioni, risulterà un qualche residuo, allora sarà segno, che la radice del proposto numero non si può esprimere coi numeri in una maniera precisa, e che fa d'uopo estrarla per approssimazione. Tali radici si chiamano *Incommensurabili*, *Irrazionali*, *Sorde*. La radice quadrata di 5 è irrazionale, poichè, dopo d'averne estratta la radice 2, si ha 1 di avanzo. La radice cubica di 38 è pure irrazionale, poichè, dopo d'averne estratta la radice 3, si trova 11 di avanzo. La quarta radice di 23 è pure sorda, poichè, dopo d'averne cavata la radice 2, si trova 7 d'avanzo, e così di altre.

67. Varj sono i modi, con cui nell'estrarre la radice da un numero, che non è potestà perfetta, si può approssimare al vero valore. Fra questi modi addurremo quello, che si pratica coll'aggiugnere tanti zero al numero proposto, quante sono le unità contenute nell'indice della radice,

che ſi vuole eſtrarre: l' ultima cifra, che con tal modo di operare ſi ottiene nella radice, eſprime le decime parti di un intero; e così, ſe ſi dovrà eſtrarre la radice quadrata da 7, che non è un quadrato perfetto, ſi aggiugneranno due zero; ſe ſi dovrà eſtrarre la radice cubica da 45, che non è cubo perfetto, ſi aggiugneranno tre zero; e ſe ne aggiugneranno quattro, ſe ſi vorrà eſtrarre la radice quarta; indi ſi caverà la radice ſecondo il ſolito, e l' ultima cifra di queſta a mano deſtra ſi ſeparerà dalle prime con un punto per additare, che dell' intero eſſa ne contiene tante decime parti, quante ſono le unità contenute in queſta ultima cifra.

68. Per applicare l'addotta regola, debbaſi eſtrarre la radice quadrata da 7, ſi aggiugneranno due zero per avere 700, da cui cavando la radice quadrata nel modo ſolito, s'avrà 2·6 per la radice approſſimata, in cui ſi noterà un punto a ſiniſtra del 6 per additare, ch' eſſa radice è 2 interi, e 6 decimi, non facendoſi più conto dell'avanzo 24. Per eſtrarre la radice quadrata da 1069 ſi aggiugneranno due zero per avere 106900, indi cavata nel modo ſolito la radice, ſi avrà 32.6, e col notare un punto a ſiniſtra dell' ultima cifra 6

si additerà, che la radice approssimata è 32 interi, e 6 decimi.

Per estrarre la radice cubica da 42 si aggiugneranno tre zero (§. 67.) per avere 42000, e operando in seguito nel modo solito, si troverà, che la radice approssimata è 3·4, e col notare un punto a sinistra dell' ultima cifra s'additerà, ch'essa radice è 3 interi, e 4 decimi, non facendosi più conto dell' avanzo. E così ancora per estrarre la radice cubica da 9761 si aggiugneranno tre zero, e s' avrà 9761000, e operando in seguito nel modo solito, si troverà, che la radice approssimata è 21·3, e col notare un punto a sinistra dell'ultima cifra 3 si additerà, ch'essa radice è 21 interi, e 3 decimi, non facendosi più conto dell' ultimo avanzo: collo stesso metodo si estrarrà la radice quarta, quinta ec. dai numeri, che non sono quarta, quinta ec. potestà perfetta.

69. Per conoscere il fondamento delle addotte operazioni si consideri che, essendo 7 lo stesso, che $\frac{700}{100}$, la radice quadrata d' ambedue queste espressioni dee pure essere la stessa; estratta pertanto la radice approssimata del numeratore 700, s'avrà 26, e la radice commensurabile del denominatore sarà 10, e quindi la radice

quadrata di $\frac{700}{100}$ ſarà $\frac{26}{10}$, o ſia 2 $\frac{6}{10}$, come ſi è ritrovato di ſopra, ſcritto però in queſt' altra maniera 2·6 per maggior ſemplicità.

Così ancora la radice cubica di 42 ſarà la ſteſſa, che quella di $\frac{42000}{1000}$; ma la radice approſſimata del numeratore è 34, e la radice commenſurabile del denominatore è 10, adunque la radice cubica di $\frac{42000}{1000}$ ſarà $\frac{34}{10}$, o ſia 3 $\frac{4}{10}$, come s'è trovato quì avanti, ſcritto però in queſt' altra maniera più ſemplice 3·4, come ſuol praticarſi nell' Aritmetica per diſtinguere gl' interi dai rotti in iſpezie.

70. Se ſi vorrà poi approſſimare maggiormente alla vera radice, converrà aggiugnervi un maggior numero di zero; ſe nell' eſtrarre la radice quadrata ſi aggiugneranno quattro zero al numero propoſto, le due ultime cifre della radice ſaranno centeſime parti dell' intero; ſe ſi aggiugneranno ſei zero al propoſto numero, le tre ultime cifre della radice ſaranno milleſime parti dell' intero; e così ſaranno dieci milleſimi le quattro ultime cifre della radice, ſe al propoſto numero ſi ſaranno

aggiunti otto zero. Dovendosi poi tutte esse frazioni decimali separare dagli interi col mezzo di un punto, e così 6·37 indicherà 6 interi, e 37 centesimi, 48·503 indicherà 48 interi, e 503 millesimi, 105·0074 indicherà 105 interi, e 74 dieci millesimi ec.

Per conoscere il fondamento di quest'altra operazione, basta riflettere, che, volendo estrarre la radice quadrata da $7 = \frac{70000}{10000}$, si ha 264 per la radice approssimata del numeratore, e 100 radice razionale del denominatore, onde $\frac{264}{100}$ uguaglia $2\frac{64}{100}$, o sia 2·64.

71. Nella stessa maniera per approssimarsi maggiormente alla vera radice cubica di una potestà imperfetta vi si aggiugneranno sei zero, e allora le due ultime cifre della radice saranno centesime parti dell'intero; se poi si aggiugneranno nove zero, le tre ultime cifre saranno millesime parti dell'intero, e così di seguito, non facendosi poi più conto dell'ultimo avanzo.

Per approssimarsi maggiormente nell'estrarre la radice quarta da una potestà imperfetta, in vece di quattro zero se ne aggiugneranno otto, e allora le due

ultime cifre della radice ſaranno centeſime parti dell'intero, ſe ſi aggiugneranno dodeci zero al numero propoſto, le tre ultime cifre della radice ſaranno milleſime parti dell'intero ec.

72. Volendo eſtrarre la radice approſſimata da un rotto, che non ſia poteſtà perfetta, ſi opererà nel numeratore, e nel denominatore, come s'è detto quì avanti, e ſe ſi dovrà eſtrarre la radice approſſimata da un intero congiunto con un rotto, ſi ridurrà tutto il numero propoſto in forma di rotto, indi ſi opererà come avanti; ma perchè le radici approſſimate del numeratore, e del denominatore producono un valore più lontano dal vero, così per approſſimarſi maggiormente baſterà moltiplicare il numeratore, ed il denominatore per un numero tale, che produca una poteſtà perfetta nell'uno, o nell' altro di eſſi.

Per eſempio per eſtrarre la radice quadrata da $\frac{2}{3}$, ſe ſi moltiplicherà ſotto e ſopra per 2, s'avrà $\frac{4}{6}$, in cui il numeratore è un quadrato perfetto, e la radice di queſto rotto ſarà $\frac{2}{2.4}$, cioè preciſa nel

numeratore, ed approſſimata nel denominatore. Se il rotto $\frac{2}{3}$ ſi moltiplicherà per 3, s'avrà $\frac{6}{9}$, in cui il denominatore è un quadrato perfetto, e la radice di queſto rotto ſarà $\frac{2 \cdot 4}{3}$, cioè approſſimata nel numeratore, ed eſatta nel denominatore. Se per eſtrarre la radice cubica da $\frac{9}{4}$ ſi moltiplicherà il rotto per 3, s'avrà $\frac{27}{12}$, in cui il numeratore è un cubo perfetto; onde la radice del rotto ſarà $\frac{3}{2 \cdot 2}$, cioè eſatta nel numeratore, ed approſſimata nel denominatore; ſe poi il rotto $\frac{9}{4}$ ſi moltiplicherà per 2, s'avrà $\frac{18}{8}$, in cui il denominatore è un cubo perfetto, e la radice cubica del propoſto rotto ſarà $\frac{2 \cdot 6}{2}$, cioè approſſimata nel numeratore, e preciſa nel denominatore, e così di altri.

Del maneggiamento delle Frazioni Decimali.

73. Si chiamano frazioni decimali quei rotti, che esprimono decine, centinaia, migliaia ec. di un intero. Nelle radici, che si cavano per approssimazione coll' aggiugnere dei zero al numero proposto, si hanno le frazioni decimali congiunte cogli interi.

Le frazioni decimali si ottengono pure col dividere un numero per un altro, che non lo misura esattamente, e coll' aggiugnere nel dividendo dei zero a beneplacito, o pure finchè nulla più s' abbia di residuo nella divisione.

```
    8 | 75
  ----|
 9.375  30
         60
         40
         ==
```

Nel dividere 75 per 8 si ha 9 di quoziente coll' avanzo 3, scrivasi a destra del 3 un zero, e s' avrà 30, che diviso per 8 dà 3 di quoziente, alla cui sinistra si noterà un punto per separarlo dall' intero 9, e così si dirà, che 9 interi e 3 decimi sono il quoziente approssimato di 75 diviso per 8; ma, se si vorrà il quoziente preciso, converrà aggiugnere altri zero, fin-

chè nulla rimanga dalla diviſione. Nel caſo noſtro coll' aggiugnere tre zero al 75 ſi trova di quoziente eſatto 9.375.

74. Le frazioni decimali ſi ſommano, ſi ſottrano, ſi moltiplicano, ſi dividono, e ſe ne eſtrae pure la radice qualſivoglia.

Per ſommare i decimali congiunti cogli interi convien ſcrivere queſti ultimi gli uni ſotto gli altri col ſolito ordine, cioè le unità nella medeſima colonna, indi le decine a ſiniſtra ec., e notato un punto a deſtra delle unità ſi ſcriverà la frazione decimale ricavata dalla diviſione, o dall' eſtrazione delle radici; indi ſi ſommeranno eſſi numeri, come ſe foſſero altrettanti interi, e nella ſomma ſi noterà pure il punto a deſtra delle unità degli interi. Per ſommare 16.7, 23.65, 108.09, 3.408, ſi ſcriveranno queſti numeri gli uni ſotto gli altri colle additate avvertenze,

16.	7
23.	65
108.	09
3.	408
150.	848

e ſommati indi ſecondo il ſolito, s' avrà 150. 848; chiaro eſſendo, che la cifra 7

del primo numero nel sito, che occupa, corrisponde al sito delle decine del secondo e terzo numero, ed al sito delle centinaia del quarto numero, e che queste frazioni decimali corrispondono precisamente alle seguenti,

16. 700
23. 650
108. 090
3. 408
150. 848

le quali danno la medesima somma.

75. Per sottrarre un numero composto di interi, e di decimali da un altro, si scriveranno pure le cifre col divisato ordine, indi si farà la sottrazione al solito come negli interi.

Per sottrarre 27.16 da 43.12 si scriverà

43. 12
27. 16
15. 96

e operando come se fossero interi, si avrà di residuo 15. 96.

Per sottrarre 56. 417 da 81.9 si scriverà

81. 9
56. 417

25. 483

e considerando, che le 9 decine del numero superiore equivagliono a 900 migliaia, si farà la sottrazione, come se la cifra 9 del numero superiore fosse seguitata da due zero, e s'avrà l'avanzo 25.483.

Per sottrarre 8.4 da 19.061 si scriverà

19. 061
8. 4

10. 661

e supponendo, che le 4 decine del numero inferiore sieno seguitate da due zero, si farà la sottrazione al solito, e s'avrà l'avanzo 10. 661.

76. Per moltiplicare le frazioni decimali si scriverà il moltiplicatore sotto il moltiplicando, come se fossero numeri interi, e si farà la multiplicazione secondo il solito. Dal prodotto si separeranno con un punto le decimali, e queste verranno espresse da un numero di cifre uguale alla somma di quelle, che sono nei due numeri, che si moltiplicano. Per esempio se si

moltiplica 24.73 per 8.5, si scriverà

```
  24.73
    8.5
 ------
  12365
 19784
 ------
210.205
 ------
```

e fatta la moltiplicazione, si separeranno nel prodotto tre cifre a destra per le decimali, perchè appunto ve ne sono due nel moltiplicando, ed una nel moltiplicante.

```
     42.07
     5.402
    ------
      8414
   16 8280
  21035
 ---------
 227.26214
 ---------
```

Così ancora col moltiplicare 42.07 per 5.402 s'avrà di prodotto 227.26214, in cui si separeranno con un punto cinque cifre a destra per le decimali, perchè appunto ve ne sono due nel moltiplicando, e tre nel moltiplicatore.

77. Per dividere le frazioni decimali ſi opererà come nella diviſione degli interi, e nel quoziente ſi ſepareranno con un punto tante cifre a deſtra per le decimali, quante ſaranno le unità, che rimarranno dal ſottrarre il numero delle decimali del diviſore da quello delle decimali del dividendo.

Se ſi divide 24.9048 per 3.459, nel quoziente 72 ſi ſeparerà con un punto una cifra a deſtra, come 7.2, perchè ſottrando il numero 3 delle decimali del diviſore dal numero 4 delle decimali del dividendo, ſi ha 1 d'avanzo; ſe ſi divide 34.72252 per 4.61, s' otterrà il quoziente 7532, nel quale ſi ſepareranno con un punto tre cifre a deſtra per li decimali, come ſi vede 7.532, perchè appunto, eſſendo cinque decimali nel dividendo, e due nel diviſore, ſi ha tre di differenza.

Da queſta regola ſi comprende facilmente che, ſe il numero delle cifre decimali ſarà lo ſteſſo nel dividendo, e nel diviſore, il quoziente non avrà decimali. Se ſi divide 26.88 per 3.84, il quoziente 7 non avrà decimali.

Occorrendo poi, che ſi debba dividere un numero, che non ha decimali, per un altro, che ne ha, converrà aggiugnere al

dividendo tanti zero, quante sono le cifre decimali nel divisore, ed il quoziente, che risulterà da tale divisione, sarà pure esente dai decimali. Volendo dividere 174 per 6.96, siccome due sono le cifre decimali nel divisore, così, dopo d'aver notato un punto a destra del dividendo, si scriveranno due zero, e fatta la divisione di 174.00 per 6.96, il quoziente 25 non avrà decimali.

Ultimamente, se nel fare la divisione s'incontrerà in fine un qualche avanzo, si aggiugneranno dei zero nel dividendo, i quali rappresenteranno altrettante cifre decimali (§. 73.), e il numero delle cifre decimali del quoziente sarà sempre additato dalla differenza, che vi sarà tra il numero di quelle del divisore, e delle altre del dividendo, compresovi i zero aggiunti. Per esempio nel dividere 21.74 per 2.5 si ha di quoziente 8.6 coll'avanzo 24. Se si vorrà continuare la divisione si aggiugneranno due zero, col mezzo de' quali si otterrà il quoziente esatto 8.696.

78. Finalmente per estrarre la radice da un numero, che abbia delle frazioni decimali, fa di mestiere, che il numero delle cifre, che esprimono i decimali, sia pari, allorchè si tratta di estrarre la radice qua-

quadrata, come 3.52, 156.3841, 17.108453. Se ſi dovrà eſtrarre la radice cubica, le cifre decimali dovranno eſſere tre, o ſei, o nove, o dodeci; ſe ſi dovrà eſtrarre la radice quarta, il numero delle cifre decimali ſarà quattro, o otto, o dodici; ſe ſi dovrà eſtrarre la radice quinta, il numero delle cifre decimali ſarà cinque, o dieci, o quindici, e così di altre.

Occorrendo poi, che il numero delle cifre decimali non foſſe tale, baſterà aggiugnervi dei zero per ridurlo al diviſato ſegno; dopo del che ſi ſegneranno i caratteri del numero propoſto da due in due, o da tre in tre, o da cinque in cinque, ſecondo che ſi vorrà eſtrarre la radice quadrata, o la cubica, o la quinta radice, indi ſi opererà a tenore delle regole date.

Affine poi di diſtinguere le cifre decimali nella radice, ſi dirà, che nell' eſtrazione della radice quadrata ogni due cifre decimali nel numero propoſto ne eſigono una nella radice; nell' eſtrazione della radice cubica ogni tre cifre decimali, che s' incontreranno nel numero propoſto, ne eſigono una nella radice. Nell' eſtrarre la radice quinta ſi noterà una cifra decimale in queſta per ogni cinque cifre decimali, che ſaranno nel numero propoſto ec.

CAPO IV.

Del Calcolo delle Quantità irrazionali.

79. Quantità irrazionale, incommenſurabile, o ſorda diceſi quella radice, che non ſi può eſtrarre da una quantità propoſta, come $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{c-m}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{19}$, $\sqrt[5]{27}$ ec. (§. 66.)

Per poter diſcorrere con fondamento del calcolo delle quantità irrazionali, ſi deve in primo luogo ſapere che, ſe ſi moltiplicano due quadrati l' uno per l' altro, ſi produce un quadrato, la cui radice è il prodotto delle loro riſpettive radici, e ſe ſi moltiplicano fra loro due cubi, il prodotto d' eſſi è parimenti un cubo, la cui radice è altresì il prodotto delle loro riſpettive radici; lo ſteſſo ſegue, ſe ſi moltiplicano due quarte, due quinte ec. poteſtà. Per eſempio ſe ſi moltiplicano i due quadrati aa, bb, s' avrà il prodotto $aabb$, che è altresì un quadrato, la cui radice quadrata è ab, cioè il prodotto delle radici a, b dei due quadrati, che ſi ſono moltiplicati: non altrimenti moltiplicandoſi i due cubi a^3, b^3, s' avrà il prodotto $a^3 b^3$, che è altresì un cubo, la cui radice cubica ab è il prodotto delle due radici a, b dei due cubi,

che ſi ſono moltiplicati. Lo ſteſſo ſi proverà delle altre poteſtà.

Della riduzione delle quantità radicali alla più ſemplice eſpreſſione.

80. Si riducono le quantità radicali alla più ſemplice eſpreſſione, qualora la quantità, che è ſotto il ſegno radicale, ſi divide per la maggiore poteſtà, per cui è diviſibile, denominata eſſa poteſtà dall'eſponente del ſegno radicale, laſciando il quoziente ſotto il ſegno, e ponendo la radice della poteſtà fuori di eſſo. Se ſia propoſto di ridurre alla più ſemplice eſpreſſione la quantità $\sqrt{4aab}$, ſi dividerà la quantità $4aab$, che è ſotto il ſegno radicale, per $4aa$, che è il maggior quadrato, per cui è diviſibile la quantità $4aab$; dappoi, laſciando il quoziente b ſotto il ſegno radicale, ſi ſcriverà $2a$, cioè la radice di $4aa$ fuori d'eſſo, e s'avrà $2a\sqrt{b}$, che ſarà la quantità ridotta alla più ſemplice eſpreſſione; imperocchè ſi può conſiderare $4aab$ come il prodotto del quadrato $4aa$ pel quadrato b; ma due quadrati, che ſi moltiplicano, producono un quadrato, la cui radice è uguale al prodotto delle radici quadrate dei quadrati, che ſi ſono moltiplicati; adunque $\sqrt{4aab}$

sarà uguale al prodotto di $\sqrt{4aa \times b}$; ma perchè $\sqrt{4aa}$ è lo stesso, che $2a$; adunque $\sqrt{4aa} \times \sqrt{b}$, ovvero $\sqrt{4aab}$ sarà lo stesso, che $2a \times \sqrt{b}$, o sia $2a\sqrt{b}$.

La quantità $2a$, che si trova avanti il segno radicale, si chiama *coefficiente*.

Per ridurre la quantità $\sqrt[3]{27d^2bc^3}$ alla più semplice espressione, si dividerà $27d^2bc^3$ per $27c^3$, che è il maggior cubo, per cui è divisibile la quantità $27d^2bc^3$; e perchè il quoziente è d^2b, e la radice cubica di $27c^3$ è $3c$, sarà $3c\sqrt[3]{d^2b}$ la quantità proposta ridotta alla più semplice espressione; e così ancora $\sqrt{aax-aac}$ ridotta alla più semplice espressione sarà $a\sqrt{x-c}$. Se s' abbia la quantità $\sqrt[3]{54}$ da ridursi alla più semplice espressione, si dividerà il numero 54, che è sotto il segno, per 27, che è il maggior cubo, per cui è divisibile il numero 54, e, lasciando il quoziente 2 sotto il segno radicale, si scriverà fuori d'esso il numero 3, che è la radice cubica di 27; sicchè tale quantità ridotta alla più semplice espressione sarà $3\sqrt[3]{2}$, e così ancora riducendo $\sqrt{150}$ alla più semplice espressione, s'avrà $5\sqrt{6}$, stantechè $\sqrt{150} = \sqrt{25 \times 6}$.

81. Da ciò, che antecedentemente è stato detto, si raccoglie che, se s' abbia

una qualſivoglia quantità radicale col ſuo coefficiente, la quale ſi voglia ſenza mutare il ſuo valore trasformare in un'altra, che non abbia coefficiente, ſi dovrà inalzare il coefficiente alla poteſtà denominata dal ſegno radicale, e per tale poteſtà moltiplicare la quantità, che ſi trova ſotto il ſegno, indi ſi laſcerà il prodotto ſotto lo ſteſſo ſegno radicale: ſicchè $c^2\sqrt{a}$ ſarà lo ſteſſo, che $\sqrt{ac^4}$, ed $a\sqrt[3]{x-c}$ ſarà lo ſteſſo, che $\sqrt[3]{a^3x-a^3c}$, e $5\sqrt[3]{4}$ ſarà lo ſteſſo, che $\sqrt[3]{500}$.

82. Qualſivoglia quantità irrazionale, come $\sqrt{5}$, diceſi incommenſurabile in ſe ſteſſa, perchè nè con numero intero, nè con intero e rotto, nè con rotto ſi può eſprimere il ſuo valore; ma le quantità $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{5}$ ſi dicono incommenſurabili fra loro. Lo ſteſſo dire ſi dee delle quantità $2\sqrt{2}$, $4\sqrt[3]{2}$, perchè di eſſe non ſi può eſprimere qual parte, o parti l' una ſia in comparazione dell' altra. All'oppoſito ſi dicono commenſurabili fra loro, e comunicanti quelle quantità radicali, delle quali ſi può eſprimere qual parte, o parti l' una ſia dell' altra, come $\sqrt{8}$, $\sqrt{32}$, perchè ridotte queſte alla più ſemplice eſpreſſione, s' avrà $2\sqrt{2}$, e $4\sqrt{2}$, dove ſi vede, che la prima $2\sqrt{2}$ è la metà della ſeconda $4\sqrt{2}$.

Si ſcorge adunque, che le quantità irrazionali ſaranno fra loro comunicanti, allorchè avranno lo ſteſſo ſegno radicale, e ridotte alla più ſemplice eſpreſſione avranno la ſteſſa quantità ſotto il ſegno ſuddetto.

Ridurre le quantità irrazionali alla ſteſſa denominazione.

83. Si riducono le quantità irrazionali alla medeſima denominazione, allorchè due, o più radicali, avendo l'eſponente diverſo, ſi mutano in altri, i quali hanno il medeſimo eſponente ſenza alterarne il valore. Se l' eſponente minore dei ſegni radicali delle quantità propoſte è parte aliquota dell' eſponente maggiore, ſi dividerà l' eſponente maggiore pel minore, ed il quoziente ſarà il numero, che indica a quale poteſtà ſi dovrà inalzare la quantità, che ſi trova ſotto il ſegno dell' eſponente minore, e a tale poteſtà ſi prefiggerà il ſegno radicale coll' eſponente maggiore. Per ridurre le quantità $\sqrt[2]{ac}$, e $\sqrt[6]{cm^5}$ alla medeſima denominazione, ſiccome l'eſponente 2 è parte aliquota dell'eſponente 6, dividaſi l' eſponente 6 per l' eſponente 2, e ſiccome ſi ha 3 di quoziente, s'inalzi la quantità *ac* al cubo, ed al prodotto

$a^3 c^3$ prefiggasi il segno radicale coll'esponente maggiore 6, s'avrà $\sqrt[6]{a^3 c^3}$, che sarà lo stesso, che $\sqrt{ac}$; e quindi $\sqrt[6]{a^3 c^3}$ sarà ridotta alla medesima denominazione di $\sqrt[6]{cm}$ Nella stessa maniera se sieno proposte le quantità $\sqrt{3}$, e $\sqrt[8]{5}$, le quali si debbono ridurre alla medesima denominazione, perchè dividendo l' esponente 8 per l' esponente 2, si ha 4 di quoziente, s'inalzerà il numero 3 alla quarta potestà, e s'avrà 81; sicchè $\sqrt[8]{81}$ sarà lo stesso, che $\sqrt{3}$, e conseguentemente le quantità proposte ridotte alla medesima denominazione saranno $\sqrt[8]{81}$, e $\sqrt[8]{5}$.

84. Occorrendo, che il radicale, il quale ha il massimo esponente, si possa ridurre a più semplice espressione, in simil riscontro si potrà semplificare l' operazione suddetta. Debbansi ridurre alla stessa denominazione i radicali $\sqrt{3}$, $\sqrt[8]{36}$, siccome $\sqrt[8]{36}$ si può ridurre a più semplice espressione, stantechè la radice ottava di 36 è lo stesso, che la radice quarta di 6; così in vece di $\sqrt[8]{36}$ si potrà scrivere $\sqrt[4]{6}$; adunque riducendo $\sqrt{3}$, e $\sqrt[4]{6}$ alla medesima denominazione col modo precedentemente accennato, si troverà $\sqrt[4]{9}$, e $\sqrt[4]{6}$, che saranno le quantità radicali proposte ridotte alla medesima denominazione, ed

alla minore espressione; e così ancora se si dovranno ridurre alla medesima denominazione i radicali $\sqrt[3]{5}$, e $\sqrt[12]{196}$, siccome quest' ultimo, essendo ridotto a più semplice espressione, è uguale a $\sqrt[6]{14}$, così basterà inalzare $\sqrt[3]{5}$ alla seconda potestà, e s' avrà $\sqrt[6]{25}$; onde i due radicali ridotti alla stessa denominazione saranno $\sqrt[6]{25}$, e $\sqrt[6]{14}$.

Tutte queste operazioni si deducono immediatamente dalla teoria data (§. 15.)

85. Allorchè l' indice minore non è parte aliquota dell' indice maggiore, come per esempio se si dovessero ridurre alla medesima denominazione le quantità $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$; in simil caso convien moltiplicare fra loro gli esponenti 2, 3, 4, e s' avrà 24 di prodotto, che sarà l' esponente comune; ma siccome esse quantità ridotte allo stesso esponente 24 si possono ancora ridurre ad un comune, e minor esponente; così in vece di pigliare esso 24 per esponente comune si piglierà il 12, che è il minor numero, il quale può esser diviso dai numeri 2, 3, 4. Dappoi dicasi, perchè $\sqrt{2}$ è la radice quadrata di 2, sarà pure $\sqrt{2}$ la radice quarta del quadrato di 2, la radice sesta del suo cubo, la radice ottava della sua quarta potestà, la

radice decima della ſua quinta poteſtà, e la radice duodecima della ſua ſeſta (§.15.); ma perchè inalzando 2 alla ſeſta poteſtà ſi ha 64, così $\sqrt[12]{64}$ ſarà equivalente a $\sqrt{2}$. Non altrimenti, poichè $\sqrt[3]{4}$ è la radice cubica di 4, ſarà altresì la radice ſeſta del quadrato di 4, la radice nona del ſuo cubo, e la radice duodecima della ſua quarta poteſtà; e perchè inalzando 4 alla quarta poteſtà ſi ha 256, così $\sqrt[12]{256}$ ſarà equivalente a $\sqrt[3]{4}$. Collo ſteſſo raziocinio ſi troverà, che $\sqrt[4]{6}$ ſarà equivalente a $\sqrt[12]{216}$; e però le quantità radicali $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$ ridotte alla ſteſſa denominazione ſaranno $\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[12]{216}$.

86. Dal fin quì detto ſi fa chiaro, che per ridurre una qualſivoglia quantità razionale alla medeſima denominazione d'una quantità irrazionale propoſta baſta inalzare la quantità razionale a quella poteſtà indicata dall'eſponente della quantità irrazionale, ed a tale poteſtà prefiggerle il ſegno radicale collo ſteſſo eſponente della quantità irrazionale propoſta; ſicchè, riducendo le quantità a, b^2 alla medeſima denominazione di $\sqrt[4]{c}$, s'avrà $\sqrt[4]{a^4}$, $\sqrt[4]{b^8}$.

Sommare le quantità Radicali.

87. Per ſommare le quantità radicali, ſi devono in primo luogo queſte ridurre alla ſteſſa denominazione, ed indi alla più ſemplice eſpreſſione; ſe accade, che così ridotte ſieno comunicanti, ſe ne ſommeranno gli coefficienti, e la ſomma ſarà il coefficiente da prefiggerſi al comune radicale, e s' avrà la ſomma delle quantità propoſte. Per ſommare i radicali $\sqrt{72}$, $\sqrt[4]{64}$, ſi ridurranno alla medeſima denominazione, e s' avrà $\sqrt{72}$, e $\sqrt{8}$, i quali, eſſendo ridotti alla più ſemplice eſpreſſione, danno $6\sqrt{2}$, e $2\sqrt{2}$. Ora, perchè queſti ſono comunicanti, ſe ne ſommeranno i coefficienti, e la ſomma 8 ſarà il coefficiente da prefiggerſi al comune radicale $\sqrt{2}$; laonde $8\sqrt{2}$ ſarà la ſomma delle quantità propoſte.

88. Se poi le quantità propoſte, eſſendo comunicanti, aveſſero dei coefficienti letterali, come ſono le quantità $a\sqrt{b}$, $+m\sqrt{b}$, $-c\sqrt{b}$, in tale caſo ſi ſcriveranno l' una dopo l' altra, laſciando a ciaſcuna il ſuo riſpettivo ſegno; e così $a\sqrt{b} + m\sqrt{b} - c\sqrt{b}$ rappreſenterà la ſomma delle quantità propoſte, e queſta ſomma ſi può altresì rappreſentare, ſcrivendo $\overline{a+m-c}\sqrt{b}$.

89. Qualora, dopo d' aver fatto le debite riduzioni nelle quantità propoſte, queſte non riſulteranno comunicanti, baſterà ſcriverle una dopo l' altra. Per ſommare $\sqrt{2}$ con $\sqrt[3]{5}$, ſi ſcriverà $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$; per ſommare $4\sqrt{3}$ con $2\sqrt[5]{3} - 5\sqrt[3]{7}$, ſi ſcriverà $4\sqrt{3} + 2\sqrt[5]{3} - 5\sqrt[3]{7}$. Per ſommare $3a\sqrt{c}$ con $-8\sqrt{dm}$, ſi ſcriverà $3a\sqrt{c} - 8\sqrt{dm}$.

Sottrarre le quantità Radicali.

90. Per ſottrarre le quantità radicali ſi ridurranno alla ſteſſa denominazione, ed indi alla più ſemplice eſpreſſione, e ſe, fatte eſſe riduzioni, ſi troveranno comunicanti, ſi ſottrerrà il coefficiente della quantità da ſottrarſi dal coefficiente dell' altra, ed il rimanente ſarà il coefficiente da prefiggerſi al comune radicale. Se ſarà propoſto a ſottrarre la quantità $\sqrt[4]{144}$ dalla quantità $\sqrt{147}$; ſiccome la prima di queſte ſi riduce a $2\sqrt{3}$, e la ſeconda ſi eſprime per $7\sqrt{3}$; così, levando il coefficiente 2 della quantità da ſottrarſi dal coefficiente 7 dell' altra, il rimanente 5 ſarà il coefficiente da prefiggerſi al comune radicale $\sqrt{3}$; onde s' avrà $5\sqrt{3}$ di reſiduo.

Se, dopo d' aver fatto le debite riduzioni, le quantità non riuſciranno comunicanti, allora ſi muterà il ſegno a quella, che ſi deve ſottrarre, e col ſegno mutato ſi ſcriverà preſſo l' altra. Per ſottrarre $\sqrt[3]{2}$ da $\sqrt{80}$ ſi ſcriverà $\sqrt{80} - \sqrt[3]{2}$.

E ſe foſſe propoſto a ſottrarſi la quantità $2\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{5}$ dalla quantità $4\sqrt{3} + 6\sqrt[3]{5}$, ſi muteranno i ſegni alla quantità da ſottrarſi $2\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{5}$, e coi ſegni mutati ſi ſcriverà l' una dopo l' altra, ſicchè il reſiduo ſarà $4\sqrt{3} + 6\sqrt[3]{5} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{5}$; e perchè $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ è lo ſteſſo, che $2\sqrt{3}$, e $6\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5}$ è lo ſteſſo, che $10\sqrt[3]{5}$, così il reſiduo ricercato, corretta l' eſpreſſione, ſarà $2\sqrt{3} + 10\sqrt[3]{5}$.

Si fa quì oſſervare, che col ſommare, o ſottrarre i radicali, che non ſono comunicanti, ſi vengono a formare quantità compoſte di molti termini, che perciò ſi chiamano moltinomj, ed in iſpezie diceſi *Binomio* quella, che è compoſta di due termini, *Trinomio* quella, che ne contiene tre, e *Quadrinomio* quella, che ne ha quattro, e così ſucceſſivamente.

Della moltiplicazione delle quantità Radicali.

91. Per moltiplicare le quantità radicali non è necessario ridurle alla più semplice espressione, ma basta, che sieno ridotte alla medesima denominazione; ciò supposto, se si dee moltiplicare una quantità semplice per un' altra, si moltiplicherà la quantità, che è sotto il segno radicale dell' una, per la quantità, che è sotto il segno radicale dell' altra, ed al prodotto si prefiggerà il comune segno radicale. Sicchè nel moltiplicare $\sqrt{a}$ per $\sqrt{b}$ il prodotto sarà $\sqrt{ab}$. Imperocchè, siccome il prodotto di due quadrati è un quadrato, la cui radice è il prodotto delle radici dei quadrati, che si sono moltiplicati (§ 79.), così, essendo moltiplicate le quantità, che sono sotto i segni radicali, cioè le quantità a, b, che si considerano come quadrati, il prodotto ab sarà un quadrato, la cui radice quadrata, cioè $\sqrt{ab}$, sarà il prodotto di $\sqrt{a}$ moltiplicato per $\sqrt{b}$. Allorchè le quantità proposte hanno dei coefficienti, si farà il prodotto delle quantità radicali, senza aver alcun riguardo ai coefficienti, indi si moltiplicherà il coefficiente dell' una pel coefficiente dell' altra, e

questo secondo prodotto sarà il coefficiente, che si deve prefiggere al primo; e però il prodotto di $a\sqrt[3]{b}$ moltiplicato per $c\sqrt[3]{d}$ sarà $ac\sqrt[3]{bd}$: il prodotto di $a\sqrt{5c}$ per $a\sqrt{7m}$ sarà $a^2\sqrt{35cm}$: il prodotto di $3\sqrt{2}$ per $4\sqrt{18}$ sarà $12\sqrt{36}$; e siccome $\sqrt{36}$ è lo stesso, che 6, così tale prodotto sarà 12×6, o dicasi 72, la qual cosa fa vedere, che, quantunque le quantità proposte sieno irrazionali, talvolta il loro prodotto riesce razionale.

92. Se si dovrà moltiplicare $a^2 + 2\sqrt{b} + \sqrt{3}$ per $3\sqrt{cd} - \sqrt{x}$, si scriverà una quantità sotto l'altra, e cominciando a moltiplicare la prima $a^2 + 2\sqrt{b} + \sqrt{3}$ pel termine $3\sqrt{cd}$ della seconda, s'avranno i prodotti $3a^2\sqrt{cd} + 6\sqrt{cdb} + 3\sqrt{3cd}$, e di nuovo moltiplicando ciascun termine della prima per l'altro termine $-\sqrt{x}$ della seconda, s'avranno gli prodotti $-a^2\sqrt{x} - 2\sqrt{bx} - \sqrt{3x}$, e fatta finalmente la somma d'essi prodotti parziali, s'avrà $3a^2\sqrt{cd} + 6\sqrt{cdb} + 3\sqrt{3cd} - a^2\sqrt{x} - 2\sqrt{bx} - \sqrt{3x}$ pel prodotto ricercato.

Della Divisione delle quantità Radicali.

93. Per dividere le quantità radicali non è neppure necessario, che si riducano alla

più ſemplice eſpreſſione, ma baſta, che ſieno ridotte alla medeſima denominazione. Ciò ſuppoſto, ſe ſi dee dividere una quantità radicale ſemplice per un'altra, ſi dividerà la quantità, che è ſotto il ſegno radicale del dividendo per la quantità, che è ſotto il ſegno radicale del diviſore, ed al quoziente ſi prefiggerà il comune ſegno radicale, e occorrendo, che le quantità propoſte abbiano dei coefficienti, ſi dividerà pure il coefficiente del dividendo per quello del diviſore, e queſto quoziente ſarà il coefficiente, che ſi dee prefiggere al primo; ſe ſia propoſto dividere $\sqrt{aab}$ per $\sqrt{ab}$, il quoziente ſarà $\sqrt{a}$, e ſe ſi dee dividere $8\sqrt{aabc}$ per $2\sqrt{ac}$, il quoziente ſarà $4\sqrt{ab}$, così ancora nel dividere $15\sqrt[3]{48ac^2}$ per $5\sqrt[3]{12ac}$, il quoziente è $3\sqrt[3]{4c}$: nel dividere $6a\sqrt{2+b}$ per $3\sqrt{2+b}$, il quoziente è $2a$.

94. Se le quantità propoſte a dividerſi ſaranno compoſte, per eſempio ſe ſi doveſſe dividere $15+6\sqrt{5}-15\sqrt{a}-6\sqrt{5a}$ per $3-3\sqrt{a}$, ſi oſſerverà la medeſima regola, che ſi è tenuto nella diviſione delle quantità razionali (§. 36.):

$$\begin{array}{c|l} 3-3\sqrt{a} & 15+6\sqrt{5}-15\sqrt{a}-6\sqrt{5a} \\ \hline 5+2\sqrt{5} & \end{array}$$

e però disposte le quantità, come ivi si è detto, dicasi dividendo 15 per 3 si ha 5 di quoziente, e moltiplicando il divisore pel quoziente 5, s'avrà $15 - 15\sqrt{a}$ di prodotto, che sottratto dalla quantità da dividersi, s'avrà $+ 6\sqrt{5} - 6\sqrt{5a}$ di residuo. Dappoi dividendo $6\sqrt{5}$ per 3 si ha $2\sqrt{5}$ di quoziente, e moltiplicando il divisore $3 - 3\sqrt{a}$ pel quoziente $2\sqrt{5}$, si ha $6\sqrt{5} - 6\sqrt{5a}$ di prodotto, che sottratto dal residuo $6\sqrt{5} - 6\sqrt{5a}$ nulla vi rimane. Perciò sarà $5 + 2\sqrt{5}$ il quoziente ricercato.

95. Se sia proposto da dividere $\sqrt{a^3 + 2a^2b + abb} + \sqrt{aab + 2abb + bbb}$ per $a + b$; si dovrà ridurre $a + b$ alla medesima denominazione, che hanno i termini delle quantità da dividersi, e s'avrà $\sqrt{a^2 + 2ab + bb}$. e diviso indi il primo termine $\sqrt{a^3 + 2a^2b + abb}$ del dividendo pel divisore $\sqrt{a + 2ab + bb}$, risulterà il quoziente $\sqrt{a}$; si moltiplichi questo quoziente pel divisore, e se ne sottri il prodotto, e si avrà $\sqrt{aab + 2abb + b^3}$ di residuo, il quale diviso per $\sqrt{a^2 + 2ab + bb}$ darà $\sqrt{b}$ di quoziente; e poichè moltiplicando questo quoziente pel divisore, e facendo la debita sottrazione nulla più rimane, così $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sarà il quoziente ricercato.

Se ſia propoſta la quantità $9 - a^2 d$ da dividerſi per $3 - a\sqrt{d}$.

$$\begin{array}{l|l} \underline{3 - a\sqrt{d}} & 9 - a^2\sqrt{dd} \\ 3 + a\sqrt{d} & \underline{9 - 3a\sqrt{d}} \\ & - a^2\sqrt{dd} + 3a\sqrt{d} \end{array}$$

Perchè nella quantità da dividerſi il termine $- a^2 d$ è lo ſteſſo, che $- a^2\sqrt{dd}$, così ſi potrà pigliare $9 - a^2\sqrt{dd}$ per la quantità da dividerſi; e però, dividendo 9 per 3 primo termine del diviſore, ſi ha 3 di quoziente; ſi moltiplichi eſſo quoziente 3 pel diviſore, e ſi ſottri il prodotto $9 - 3a\sqrt{d}$ dal dividendo, e s' avrà di reſiduo $- a^2\sqrt{dd} + 3a\sqrt{d}$; ſe ſi divide il termine $3a\sqrt{d}$ d' eſſo rimanente per 3, ſi trova $a\sqrt{d}$ di quoziente, che moltiplicato pel diviſore, e ſottratto il prodotto $+ 3a\sqrt{d} - a^2\sqrt{dd}$ dal rimanente $- a^2\sqrt{dd} + 3a\sqrt{d}$, nulla vi rimane; e però $3 + a\sqrt{d}$ ſarà il quoziente della propoſta diviſione.

96. Se poi con tali operazioni non ſi potrà venire a fine della propoſta diviſione, converrà ſcrivere il dividendo per numeratore, ed il diviſore per denominatore d' un rotto, che rappreſenterà il quoziente ricercato (§. 37.)

Occorre talora, che colle precedenti regole non ſi può ſempre ricavare il quo-

ziente ricercato, quantunque per altra ſtrada ſi poſſa rinvenire; ma ſiccome accade rare volte di dover praticare ſomiglianti diviſioni, così ſi tralaſcia di entrare in tali particolarità.

97. Si dee quì oſſervare, che il calcolo degli eſponenti ſomminiſtra altresì un mezzo per moltiplicare, e dividere le quantità radicali di diverſa denominazione; purchè s' incontrino ſotto il ſegno radicale le medeſime lettere: imperocchè, ſe s' abbia per eſempio da moltiplicare la quantità $\sqrt{a}$ per $\sqrt[3]{a^2}$, ſiccome queſte ſi poſſono rappreſentare ſcrivendo $a^{\frac{1}{2}}$ $a^{\frac{2}{3}}$ (§. 20.), così il loro prodotto ſarà $a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}$, o ſia $a^{\frac{7}{6}}$, ovvero $\sqrt[6]{a^7}$.

Se ſi dee dividere $\sqrt[3]{c^4}$ per $\sqrt{c}$, o ſia $c^{\frac{4}{3}}$ per $c^{\frac{1}{2}}$, s' avrà di quoziente $c^{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}$ $= c^{\frac{5}{6}}$, ovvero $\sqrt[6]{c^5}$ (§. 21.)

Eſtrarre le radici dalle quantità radicali ſemplici.

98. Non occorre parlare del modo d'inalzare le quantità radicali ad una poteſtà

propoſta; poichè, chiunque avrà ben inteſo il modo di moltiplicarle fra loro, non incontrerà veruna difficoltà per inalzarle a qualunque poteſtà propoſta.

Quanto poi al modo di eſtrarre le radici delle quantità radicali ſemplici, egli è chiaro che, ſe ſi potrà eſtrarre la radice deſiderata dalla quantità, che è ſotto il ſegno radicale, converrà fare tal eſtrazione, ed al riſultamento ſi ſcriverà lo ſteſſo ſegno radicale; così la radice quadrata di $\sqrt[3]{9}$ ſarà $\sqrt[3]{3}$, la radice cubica di $\sqrt{125}$ ſarà $\sqrt{5}$.

Se poi il radicale avrà qualche coefficiente, ſi caverà la radice da eſſo, e queſta ſi prefiggerà al radicale già ritrovato: la radice cubica di $b^3 \sqrt{a^3 b^6}$ ſarà $b \sqrt{a b^2}$, la radice quadrata di $b^2 \sqrt[3]{a^2 c^2}$ ſarà $b \sqrt[3]{ac}$. Se poi dalla quantità, che è ſotto il ſegno radicale, non ſi potrà eſtrarre la radice ricercata, in tal caſo baſterà moltiplicare l' eſponente del ſegno radicale per l'eſponente della radice ricercata; e così la radice cubica di $\sqrt[2]{18}$ ſarà $\sqrt[6]{18}$ (§. 83.)

Finalmente, ſe non ſi potrà eſtrarre la radice nè dalla quantità, che è ſotto il ſegno, nè dal coefficiente, allora converrà far paſſare il coefficiente ſotto il

ſegno radicale, e moltiplicare l'eſponente del ſegno radicale per l'eſponente della radice ricercata. Se ſia propoſto eſtrarre la radice quadrata dalla quantità $2\sqrt[3]{5}$; ſiccome nè dal coefficiente, nè dalla quantità, che è ſotto il ſegno radicale, ſi può eſtrarre la radice ricercata, così ſi farà paſſare il 2 ſotto il ſegno radicale, e s'avrà $\sqrt[3]{40}$, e moltiplicato l'eſponente 3 del radicale per 2, che è l'eſponente della radice ricercata, s'avrà $\sqrt[6]{40}$ per la radice addimandata.

Siccome per eſtrarre le radici da radicali compoſti ſi richieggono altre cognizioni, così ſe ne parlerà a ſuo luogo.

CAPO V.

Delle Ragioni, e Proporzioni.

99. Euclide nel libro 5. definiſce la ragione matematica in una maniera generale, di modo che ſotto quella definizione ſi comprendono due ſorta di ragioni, cioè l'Aritmetica, e la Geometrica; ma ſiccome egli tratta poi ſolamente della ſeconda, e che ambedue eſſe ragioni ſono di un grande uſo nelle Matematiche, così d'uopo è individuare originalmente la

natura , e le proprietà principali di ciascheduna.

Chiamasi numero *primo* quello, che è misurato solamente dall' unità , come sono 2, 3, 5, 7, 11, 17, 23 ec., e dicesi *Composto* quel numero, che è misurato da due, o più numeri primi, come sono 4, 6, 8, 10, 12, 20, 30, 48, 360 ec.

100. Quella quantità, che misura esattamente un'altra due, o più volte, dicesi *Parte Aliquota*, e si chiama *Parte Aliquanta*, quando non misura l' altra esattamente, e così il numero 5 dicesi parte aliquota di 20, di 30, di 70, di 100 ec.; ma chiamasi parte aliquanta di 21, di 33, di 49, di 112 ec.

101. La ragione matematica è una comparazione, che si fa di due quantità omogenee, come sono due numeri, due linee, due superficie, due durazioni di tempo ec.

La prima quantità, che si confronta, chiamasi *Antecedente*, e si dice *Conseguente* l' altra quantità, alla quale si compara la prima. Nel confronto della quantità m colla n il primo termine m si chiama antecedente, ed il secondo n si dice conseguente.

102. Allorchè nel comparare due quantità si considera l' eccesso, o il difetto

dell' antecedente al conſeguente, la ragione ſi chiama *Aritmetica*; ma, ſe nel confronto ſi conſidera come l' antecedente contenga, o ſia contenuto dal conſeguente, la ragione ſi chiama *Geometrica*.

103. La differenza tra i due termini di una ragione aritmetica ſi chiama l' *eſponente*, o l' *indice* d' eſſa ragione; e così ſe nel confrontare 4 con 7 ſi conſidera, che il conſeguente 7 ſupera di 3 unità l'antecedente 4, ſi ha la ragione aritmetica, il cui eſponente è 3, e così ancora, ſe nel confrontare 5 con 3 ſi conſidera, che il conſeguente 3 è minore di 2 unità dell' antecedente 5, ſi ha la ragione aritmetica, in cui l' eſponente è 2.

Queſte ragioni ſi ſcrivono col notare un punto tra l' antecedente, ed il conſeguente, come 4. 7, 5. 3.

104. Per avere ſotto l' occhio tutto quanto intereſſa la ragione aritmetica, ſe ne eſprime il conſeguente col mezzo dell' antecedente accreſciuto, o diminuito dell' eſponente, ſecondochè eſſo antecedente è minore, o maggiore del conſeguente; e così la ragione di 4 . 7 ſi ſcrive 4 . 4 + 3, la ragione di 8 . 17 ſi ſcrive 8 . 8 + 9, la ragione di 5 . 3 ſi ſcrive 5 . 5 — 2, la ragione di 13 . 6 ſi ſcrive 13 . 13 — 7,

e generalmente ſe l' antecedente ſi chiami $= a$, l' eſponente $= d$, il conſeguente ſarà $a \pm d$; e l' eſpreſſione $a \,.\, a \pm d$ additerà una ragione aritmetica qualſivoglia, ſervendo il ſegno ambiguo $\pm$ per eſprimere l' eccesſo, o il difetto dell' antecedente verſo il conſeguente.

105. Nella ragione geometrica il quoziente, che s' ottiene col dividere un termine per l' altro, ſi chiama l' *Eſponente*, o il *Denominatore* della ragione; eſſendo arbitrario il dividere l'antecedente pel conſeguente, o pure il conſeguente per l' antecedente, purchè, qualora ſi hanno due, o più ragioni da trattare, ſe ne trovi in tutte queſte il denominatore nella ſteſſa maniera.

E così, ſe nel confrontare 4 con 12 ſi conſidera, che l' antecedente 4 è contenuto 3 volte nel conſeguente 12, ſi ha una ragione geometrica, il cui denominatore è 3. Se nel confrontare 5 con 11 ſi conſidera, che l' antecedente 5 è contenuto 2 volte ed $\frac{1}{5}$ nel conſeguente 11, ſi ha una ragione geometrica, il cui denominatore è $2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$, e così ancora ſe ſi confronterà 3 con 2, conſideran-

do, che il conseguente 2 è le due terze parti dell' antecedente 3, s' avrà una ragione geometrica, il cui denominatore sarà $\frac{2}{3}$.

Tutte queste ragioni si scrivono col notare due punti tra l' antecedente, ed il conseguente, come 4 : 12, 5 : 11, 3 : 2.

106. Dalle cose dette nell' antecedente paragrafo consegue

1.° Che, se nel dividere il termine maggiore pel minore, questo sarà parte aliquota dell' altro, il denominatore sarà sempre un numero intero; ma, se il termine minore sarà parte aliquanta dell' altro termine, il denominatore riuscirà un rotto maggiore dell' unità.

2.° Qualora poi si divide il termine minore pel maggiore, il denominatore della ragione riesce per necessità un rotto minore dell' unità.

107. Per avere sotto l' occhio tutto quanto interessa la ragione geometrica si scriveranno il divisore, ed il denominatore come segue.

Se per avere il denominatore si dividerà il conseguente per l' antecedente, la ragione si esprimerà per mezzo dell' antecedente, e del denominatore, e così la ra-

gione di $4 : 12$ si scriverà $4 : 4 \times 3$, la ragione $5 : 35$ si scriverà $5 : 5 \times 7$, la ragione $3 : 8$ si scriverà $3 : 3 \times \frac{8}{3}$, la ragione $9 : 5$ si scriverà $9 : 9 \times \frac{5}{9}$.

Se per avere il denominatore della ragione si dividerà l'antecedente pel conseguente, si scriverà per antecedente il conseguente moltiplicato pel denominatore, e così la ragione di $20 : 5$ si scriverà $5 \times 4 : 5$, la ragione di $21 : 7$ si scriverà $7 \times 3 : 7$, la ragione di $11 : 4$ si scriverà $4 \times \frac{11}{4} : 4$, la ragione di $5 : 8$ si scriverà $8 \times \frac{5}{8} : 8$, e così di altre.

Generalmente sia il denominatore $= d$, se questo proviene dal dividere il conseguente per l'antecedente $= a$, si esprimerà esso conseguente per $a d$; onde l'espressione $a : a d$ additerà questa ragione; ma, se il denominatore $= d$ nasce dal dividere l'antecedente pel conseguente $= c$, la ragione si esprimerà per $c d : c$.

108. La ragione geometrica si distingue in *Razionale*, ed *Irrazionale*, o *Incommensurabile.* Ha luogo la ragione razionale, ognorachè il suo denominatore si può es-

primere con qualche numero, come 5 : 15, 8 : 4, 3 : 7, 9 : 2, e riesce irrazionale la ragione, sempre che il suo denominatore non si può esprimere coi numeri, come avviene, allorchè si confronta un numero razionale con un radicale, come $3 : \sqrt{5}$, o pure si parificano due radicali, che non sono comunicanti, come $\sqrt{7} : \sqrt[3]{11}$, o finalmente si confrontano linee fra loro incommensurabili, come a dire il lato del quadrato col diametro del medesimo ec.

Delle Proporzioni Aritmetiche.

109. Il confronto, che si fa di due ragioni aritmetiche uguali, costituisce una proporzione aritmetica. Se si confronteranno le due ragioni uguali 5 . 8, 14 . 17, e si separeranno col mezzo di due punti, s'avrà la proporzione aritmetica 5 . 8 : 14 . 17.

Si praticherà pure la detta separazione col mezzo dei due punti, allorchè le due ragioni uguali si scriveranno in quest'altra maniera (§. 104.) $5 . 5 + 3 : 14 . 14 + 3$.

Se l'antecedente della prima ragione si chiami $= a$, quello della seconda ragione $= A$, e l'esponente comune $= d$, l'espressione $a . a \pm d : A . A \pm d$ sarà generalissima per qualsivoglia proporzione

aritmetica; purchè s' abbia l' avvertenza di pigliare in ambedue i conseguenti il segno positivo, o pure negativo.

110. La proporzione aritmetica dicesi *Discreta*, allorchè la differenza tra il primo conseguente, ed il secondo antecedente è diversa dall' esponente comune alle due ragioni; e così si dirà discreta la proporzione 7 . 9 : 14 . 16, stante che la differenza 5 tra 9, e 14 è diversa dall' esponente 2 delle due ragioni.

111. Chiamasi *Continua* la proporzione aritmetica, allorchè la differenza tra il primo conseguente, ed il secondo antecedente è uguale all' esponente delle due ragioni; e così si dirà continua questa proporzione 9 . 13 : 17 . 21, perchè la differenza 4 tra 13, e 17 è uguale all'esponente delle due ragioni.

In questo caso il conseguente della prima ragione si può far servire di antecedente pel primo termine della seconda ragione, il che somministra poi tre ragioni uguali, cioè 9 . 13, 13 . 17, 17 . 21. Questa maniera di parificare le quantità somministra il mezzo di avere una proporzione continua con tre soli termini, come 6 . 9 . 12, 13 . 17 . 21, giacchè con questi si hanno tutt' ora due ragioni uguali,

il cui termine di mezzo si chiama *medio proporzionale aritmetico.*

112. Le proporzioni continue si scrivono anche col notare a sinistra due punti intercetti da una linea, e si distinguono in *Ascendenti*, o *Crescenti*, e *Discendenti*, o *Decrescenti*, come si osserva ne' seguenti esempi

$\div$ 3 . 5 . 7 . 9
$\div$ 8 . 15 . 22 . 29
$\div$ 11 . 8 . 5 . 2
$\div$ 16 . 11 . 6 . 1

ne' quali le due prime sono ascendenti, e discendenti le due ultime.

113. Considerando più particolarmente gli esempi addotti nell' antecedente paragrafo, si vede facilmente, che nella proporzione continua il secondo termine uguaglia il primo più, o meno l' esponente, che il terzo termine uguaglia il primo più, o meno il doppio dell' esponente, e che il quarto termine uguaglia il primo più, o meno il triplo dell' esponente; e però chiamando il primo termine $= p$, l' esponente $= d$, s' avrà la seguente proporzione continua espressa in una maniera generalissima.

$\div p . p \pm d . p \pm 2d . p \pm 3d$

114. Una breve riflessione fatta intorno

l' addotta espressione generale (§. 113.) basta per dedurne le due seguenti conseguenze.

1.ª Nella proporzione continua di quattro termini la somma dei due estremi uguaglia quella dei due di mezzo, giacchè ciascheduna è espressa per $2p \pm 3d$.

2.ª Se la proporzione continua ha tre soli termini, la somma dei due estremi uguaglia il doppio di quello di mezzo. Per esempio se si pigliano i tre primi termini $\div p . p \pm d . p \pm 2d$, si ha $2p \pm 2d$ per la somma del primo, e terzo, la quale equivale il doppio del termine di mezzo $p \pm d$; e se si pigliano i tre ultimi termini $\div p \pm d . p \pm 2d . p \pm 3d$, la somma $2p \pm 4d$ dei due estremi è pure doppia del termine di mezzo $p \pm 2d$.

115. In qualsivoglia proporzione aritmetica discreta la somma dei due estremi uguaglia quella dei due di mezzo.

Sia il primo antecedente $= a$, il secondo $= A$, l' esponente comune $= d$ sarà

$a . a \pm d : A . A \pm d$, e facendo la somma de' medj, e degli estremi, s' avrà

$$a + A \pm d = a \pm d + A.$$

116. La proporzione geometrica consiste nel confronto, che si fa di due ragioni geometriche uguali, cioè che hanno lo stesso denominatore. Se si confronteranno le due ragioni uguali $2:6$, $5:15$, e si separeranno col mezzo di quattro punti, s'avrà la proporzione geometrica $2:6::5:15$.

La stessa separazione si farà pure, allorchè le due ragioni uguali si scriveranno in quest' altra maniera (§. 107.)

$2:2\times3::5:5\times3$.

Generalmente se il denominatore $=d$ della ragione si otterrà col dividere l'antecedente pel conseguente, e sia il primo conseguente $=c$, il secondo $=C$, s' avrà la proporzione

$cd:c::Cd:C$,

e se il denominatore s'otterrà col dividere il conseguente per l' antecedente, e si chiami il primo antecedente $=a$, il secondo $=A$, s' avrà la proporzione

$a:ad::A:Ad$.

117. La proporzione geometrica si distingue pure in *Discreta*, e *Continua*.

Si chiama discreta, allorchè, confrontando il primo conseguente col secondo antecedente, si ha un quoziente diverso

dal denominatore delle due ragioni uguali, che coſtituiſcono la proporzione. Per eſempio ſe nella proporzione

2 : 6 :: 5 : 15

ſi divide il ſecondo antecedente 5 pel primo conſeguente 6, ſi ha $\frac{5}{6}$ di quoziente, numero aſſai diverſo dal denominatore 3, che s' ottiene col dividere un conſeguente pel ſuo antecedente.

118. Si dice continua la proporzione geometrica, allorchè nel confronto del primo conſeguente col ſecondo antecedente s'ottiene un quoziente uguale al denominatore delle due ragioni. La proporzione 4 : 8 :: 16 : 32 ſi dirà continua, giacchè, dividendo 16 per 8, ſi ha il quoziente 2, che è uguale al denominatore delle due ragioni; e così ancora ſarà continua la proporzione 108 : 36 :: 12 : 4, giacchè, dividendo 36 per 12, ſi ha il quoziente 3, che è uguale al denominatore delle due ragioni.

119. Nella proporzione geometrica continua il conſeguente della prima ragione ſi può far ſervire d' antecedente al primo termine della ſeconda ragione, la qual coſa ſomminiſtra poi tre ragioni uguali, quantunque la proporzione abbia quattro

ſoli termini; e così nella proporzione continua 8 : 12 : : 18 : 27 ſi hanno le tre ragioni uguali 8 : 12, 12 : 18, 18 : 27.

Queſta maniera di confrontare le quantità ſomminiſtra il mezzo di avere una proporzione continua con tre ſoli termini, giacchè con eſſi ſi hanno tutt' ora due ragioni uguali, come oſſervaſi nel ſeguente eſempio 8 : 12 : 18, il cui termine di mezzo ſi chiama *Medio proporzionale geometrico.*

120. Le proporzioni continue geometriche ſi ſcrivono anche con quattro punti a ſiniſtra ſeparati da una linea, come ne' ſeguenti eſempj.

∺ 3 : 12 : 48 : 192

∺ 128 : 64 : 32 : 16

La prima di queſte proporzioni ſi chiama *Aſcendente*, o *Creſcente*, e la ſeconda ſi chiama *Decreſcente*, o *Diſcendente.*

121. Se i termini della proporzione aſcendente ∺ 3 : 12 : 48 : 192 ſi ſcriveranno a norma del §. 107, s' avrà
∺ 3 : 3 X 4 : 3 X 4 X 4 : 3 X 4 X 4 X 4, nella quale eſpreſſione s' oſſerva, che il ſecondo termine è il prodotto del primo nel denominatore, che il terzo termine è il prodotto del primo nel quadrato del denominatore, e che il quarto termine è il

prodotto

prodotto del primo nel cubo del denominatore.

La medeſima coſa s'oſſerverà pure, ſe i termini della proporzione diſcendente $\div 128 : 64 : 32 : 16$ ſi ſcriveranno a norma del detto §. 107, e che per avere il denominatore $= \frac{1}{2}$ ſi dividerà il conſeguente per l'antecedente, poichè la proporzione ſuddetta ſarà eſpreſſa in queſt'altra maniera

$$\div 128 : 128 \times \frac{1}{2} : 128 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} : 128 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

Per la qual coſa, ſe il primo termine ſi chiami $= p$, il denominatore $= d$, l'eſpreſſione $\div p : pd : pd^2 : pd^3$ ſarà generaliſſima, vale a dire che ſervirà indiſtintamente per qualſivoglia proporzione continua creſcente, e decreſcente.

122. In qualſivoglia proporzione geometrica il prodotto dei termini eſtremi è uguale a quello, che ſi fa dai due di mezzo.

Abbiaſi in primo luogo la proporzione diſcreta (§. 116.) $a : ad :: A : Ad$, ſe ſi moltiplicano i due eſtremi a, Ad tra di loro, e ſi fa lo ſteſſo coi due termini di mezzo ad, A, ſi ha $a \times Ad = ad \times A$.

Abbiaſi in ſecondo luogo la proporzione continua (§. 121.) $\div p : pd : pd^2 : pd^3$, ſe ſi moltiplicano i due eſtremi p, pd^3, ſi

ha $p^2 d^3$ uguale al prodotto dei due termini di mezzo pd, pd^2.

123. Dall' antecedente teorema consegue, che qualsivoglia equazione si può sempre convertire in una proporzione geometrica col far servire per estremi i due fattori, che sono da una banda del segno d' uguaglianza, e scrivendo per termini di mezzo gli altri due fattori; e così l'equazione $pm = qn$ si potrà convertire in questa proporzione $p : q :: n : m$; l' equazione $ac - af = K^2 - m^2$ si potrà convertire in questa proporzione

$$a : K + m :: K - m : c - f$$

e così di altre.

124. Per mezzo delle espressioni (§.122.) della proporzione discreta, e della continua si possono anche dimostrare con tutta facilità le diverse maniere di ragionare espresse nel libro quinto d' Euclide, per esempio se sia

$$a : ad :: A : Ad$$

sarà Permutando $a : A :: ad : Ad$

Invertendo $ad : a :: Ad : A$

Componendo $a + ad : ad :: A + Ad : Ad$

Dividendo $a - ad : ad :: A - Ad : Ad$

Per conversion di ragione $a : a - ad :: A : A - Ad$

imperciocchè in tutte queste maniere di argomentare si trova sempre, che il pro-

dotto degli estremi uguaglia quello dei due termini di mezzo.

125. Nella proporzione continua di tre termini il prodotto degli estremi è uguale al quadrato del termine di mezzo.

Se nella proporzione continua $\div p : pd : pd^2 : pd^3$ (§. 122.) si prenderanno i tre primi termini $\div p : pd : pd^2$, s' avrà $p^2 d^2$ pel prodotto del primo nel terzo termine, e questo prodotto si scorge facilmente essere uguale al quadrato, che si fa dal termine di mezzo pd.

Lo stesso succede, qualora si prendono i tre ultimi termini $\div pd : pd^2 : pd^3$; vedendosi chiaramente, che il prodotto $p^2 d^4$ del primo pd nell'ultimo termine pd^3 uguaglia precisamente il quadrato, che si fa dal termine di mezzo pd^2.

126. Nella proporzione continua $\div p : pd : pd^2 : pd^3$ il primo termine stà al terzo, come il quadrato del primo stà al quadrato del secondo; cioè $p : pd^2 :: p^2 : p^2 d^2$. Per conoscere la verità di questo teorema basta osservare, che il prodotto de' medj uguaglia quello degli estremi.

127. Nella proporzione continua il primo termine stà al quarto, come il cubo del primo stà al cubo del secondo, cioè $p : pd^3 :: p^3 : p^3 d^3$

Se si farà il prodotto dei medj, e degli estremi, si troverà, ch'essi sono uguali, e con ciò sarà provata la verità della proposizione.

Delle Ragioni Geometriche composte.

128. Se si hanno due, o più ragioni geometriche, e, dopo d'aver moltiplicato tra di loro gli antecedenti, e indi i conseguenti tra di loro, se ne confrontano i prodotti, la ragione, che risulta da questo confronto, si dice *Composta*, il cui denominatore è uguale al prodotto, che nasce dal moltiplicare tra di loro i denominatori delle ragioni componenti.

Abbiansi le due ragioni 4 : 8, 5 : 15, i cui denominatori sono 2, e 3, col moltiplicare tra di loro i due antecedenti 4, e 5, ed i conseguenti 8, e 15, si ha la ragione composta 20 : 120, il cui denominatore 6 è il prodotto di 2 per 3; e così ancora se si hanno le tre ragioni semplici 3 : 12, 2 : 10, 8 : 7, i cui denominatori sono 4, 5, $\frac{7}{8}$, la ragione composta 48 : 840, che nasce dal moltiplicare come sovra gli antecedenti, ed i conseguenti, ha per denominatore $\frac{35}{2}$, che è il

prodotto dei tre denominatori ſemplici 4, 5, $\frac{7}{8}$.

Generalmente ſe s' abbiano le ragioni $a : ad$, $f : fg$, $m : mK$, i cui denominatori ſono d, g, K, s'avrà colla moltiplicazione la ragione compoſta $afm : adfgmK$, il cui denominatore è dgK.

129. Importa quì avvertire che, qualora i due termini di una ragione ſono numeri compoſti, i quali hanno una miſura comune oltre l'unità, la ragione ſi potrà ridurre a numeri minori col dividerne i termini per la miſura comune.

Per eſempio i termini della ragione di 3 : 12, avendo il 3 per comune miſura, ſi ridurrà a numeri minori col dividere ciaſcun termine per 3, e s'avrà la ragione 1 : 4, che è uguale alla prima, così ancora nella ragione 5 : 30, avendo i due termini il numero 5 per comune miſura, ſi ridurrà colla diviſione a queſt'altra 1 : 6. Nella ragione di 21 : 56, avendo i due termini il numero 7 per comune miſura, ſi ridurrà colla diviſione a queſt'altra 3 : 8. I termini della ragione 42 : 160, avendo il 2 per comune miſura, ſi ridurrà eſſa ragione a queſt' altra 21 : 80, la quale più non ſi potrà ridurre, non oſtante che i

ſuoi termini ſieno numeri compoſti, giacchè non v' è tra eſſi altra miſura comune fuorchè l' unità.

130. Poichè il denominatore di una ragione compoſta è prodotto dalla moltiplica dei denominatori delle ragioni componenti, conſegue che, ſe queſte ragioni ſaranno uguali, vale a dire che avranno lo ſteſſo denominatore, la ragione compoſta avrà un denominatore, che ſarà il denominatore di una delle componenti elevato a una poteſtà indicata dal numero d' eſſe ragioni componenti; così che, ſe le ragioni componenti ſaranno due, il denominatore della ragione compoſta ſarà eſpreſſo da uno de' denominatori ſemplici elevato al quadrato; ſe le ragioni componenti ſaranno tre, il denominatore ſemplice elevato al cubo ſarà quello, che s' appartiene alla ragione compoſta, e generalmente ſe il denominatore delle ragioni uguali componenti ſi chiami $= d$, e ſia $= n$ il numero di queſte ragioni, il denominatore della ragione compoſta ſarà d^n.

Per eſempio abbianſi le ragioni uguali $2 : 8$, $5 : 20$, il cui denominatore è 4, il denominatore della ragione compoſta $2 \times 5 : 8 \times 20$, o ſia $10 : 160$ viene eſpreſ-

ſo da 16, che è il quadrato del denominatore ſemplice 4. Se ſi hanno tre ragioni uguali 2 : 8, 5 : 20, 3 : 12, il denominatore della ragione compoſta : 2 X 5 X 3 : 8 X 20 X 12 viene eſpreſſo da 64, che è il cubo di 4, e così di altre.

131. Per eſaminare queſta teoria ſotto un altro punto di viſta, ſi pigli la proporzione continua (§. 122.) $\div p : pd : pd^2 : pd^3$, e ſe ne conſiderino ſolamente tre termini, e per eſempio i tre primi $\div p : pd : pd^2$, ſi vede facilmente, che la ragione del primo al terzo termine è compoſta di due ragioni ſemplici, le quali hanno il denominatore $= d$, cioè della ragione del primo al ſecondo termine, e di quella del ſecondo al terzo, e che la ragione compoſta del primo al terzo ha per denominatore d^2, cioè il quadrato di d; la medeſima coſa ſi oſſerva nell' eſaminare i tre termini $\div pd : pd^2 : pd^3$.

Queſta propoſizione ſi eſprime anche in queſta maniera. Se tre grandezze ſono in continua proporzione geometrica, la ragione della prima alla terza grandezza è duplicata di quella, che ha la prima alla ſeconda, vale a dire che il denominatore della ragione compoſta naſce dal denominatore della ragione ſem-

plice moltiplicato una volta in ſe medeſimo.

132. Se della proporzione continua $\div p : pd : pd^2 : pd^3$ ſe ne conſiderano i quattro termini, ſi vede, che la ragione del primo al quarto è compoſta di tre ragioni uguali, cioè di quella del primo al ſecondo termine, del ſecondo al terzo, e del terzo al quarto, e che il denominatore d^3 di queſta ragione compoſta è il cubo del denominatore $= d$ delle ragioni componenti. Queſta propoſizione ſi eſprime anche in queſt'altra maniera. Se quattro grandezze ſono in continua proporzione geometrica, la ragione della prima alla quarta è triplicata di quella, che ha la prima alla ſeconda, vale a dire che il denominatore della ragion compoſta naſce dal denominatore della ragione ſemplice moltiplicato due volte in ſe medeſimo.

PARTE SECONDA

Delle maniere di risolvere i Problemi Matematici usando il metodo Analitico.

133. Due sono i metodi, coi quali si risolvono le questioni, ed i problemi, cioè *Sintetico*, o dicasi *Metodo di Composizione*, ed *Analitico*, o sia *Metodo di Risoluzione.*

Si usa il metodo sintetico, allorchè, scelti alcuni principj, si combinano in modo, che s' arriva gradatamente a conoscere ciò, che si cerca. Di questo metodo si acquista una idea chiara, e distinta, considerando i problemi risolti negli elementi d' Euclide, e nella Geometria pratica. L' Artefice, che combina insieme le diverse parti di un oriuolo, e le aggiusta in modo, che la macchina segna le ore con precisione, usa pure il metodo sintetico in questo suo operato.

Si pratica poi il metodo Analitico, ognorachè, supponendo fatta la cosa, che si cerca di conoscere, si passa a discomporla nelle sue parti costitutive per osservare come ognuna di esse contribuisca all' esistenza, ed alla perfezione della

cosa medesima. L' Artefice, che discompone un oriuolo per conoscerne l' interna struttura, e le funzioni di ciascheduna parte, usa il metodo analitico in questo suo procedimento.

Il metodo sintetico si chiama altresì *Metodo di dottrina*, stantechè è il più proprio per imparare qualsivoglia scienza, e per insegnarla. Il metodo analitico si chiama anche *Metodo d' Invenzione*, avvegnachè serve a scoprire con gran facilità le verità nascoste.

CAPO I.

Regole ed Indirizzi generali per risolvere i Problemi Matematici col metodo analitico.

134. I problemi matematici sono di tre specie, cioè *Indeterminati*, *Determinati*, e *Più che determinati*, e si cerca in ciascheduno di essi una, o più cose.

I problemi indeterminati sono scarsi di condizioni, e di dati, motivo, per cui hanno un numero infinito di soluzioni; per esempio dividere un proposto numero in due parti disuguali, descrivere una figura quadrilatera, un cerchio ec.

Un problema indeterminato può esserlo più, o meno, secondo che minore, o maggiore è il numero delle condizioni, colle quali vien proposto e vincolato; da quì avviene poi, che il numero delle sue soluzioni sminuisce a misura, che cresce quello delle condizioni. Per esempio descrivere un triangolo è un problema indeterminatissimo, se si aggiugnerà la condizione, che il triangolo debba essere costrutto sopra una data retta, rimarrà bensì tutt' ora indeterminato il problema, ma lo sarà però meno del primo: che se vi si aggiugnerà un' altra condizione, e per esempio che il triangolo da descriversi sopra la data retta debba essere isoscele, il problema sarà ancora indeterminato, ma meno ancora dei due primi, e il numero delle sue soluzioni, quantunque infinito, sarà però minore di quello del secondo problema, e minore assai più di quello del primo.

I problemi indeterminati numerici sono di pochissima utilità, motivo, per cui si tralascia di parlarne maggiormente in questi elementi; ma i problemi indeterminati geometrici sono di un grandissimo uso, onde se ne tratta diffusamente nei principj delle Matematiche sublimi.

135. I problemi determinati ſono quelli, che hanno tutte le condizioni neceſſarie per arrivare a conoſcere con preciſione ciò, che ſi ricerca, ragione, per cui il numero delle ſue ſoluzioni è limitatiſſimo: per eſempio trovare due numeri tali, che uno ſia doppio dell' altro, e la loro ſomma ſia 9. Siccome due ſoli ſono i numeri, cioè 6, e 3, i quali ſoddisfanno alle due condizioni del propoſto problema, così una ſola è la ſua ſoluzione. Lo ſteſſo dire ſi dovrà de' ſeguenti problemi geometrici determinati. Sopra una data retta terminata deſcrivere un triangolo equilatere. Deſcrivere un cerchio, il cui raggio ſia uguale alla data retta. A tre rette date trovare una quarta proporzionale ec.

Dalle coſe dette nel precedente paragrafo ſi ſcorge facilmente, che coll' accreſcere le condizioni in un problema indeterminato s' arriva a renderlo determinato, o pure, ciò, che è lo ſteſſo, qualſivoglia problema determinato viene compoſto da due, o più problemi indeterminati; per eſempio il problema determinato, in cui ſi preſcrive di deſcrivere ſopra una data retta preſa per ipotenuſa un triangolo iſoſcele rettangolo, è compoſto dai due ſeguenti problemi indeterminati,

cioè sopra la data retta presa per base descrivere un triangolo isoscele. Sopra la data retta presa per ipotenusa descrivere un triangolo rettangolo.

136. I problemi più che determinati sono quelli, che oltre le condizioni necessarie per risolverli ne contengono delle altre, che sono superflue, o che rendono il problema impossibile a risolversi. Per esempio dividere 35 per 7 in modo, che il quoziente sia 5; questo problema più che determinato ha l' ultima condizione affatto superflua, mentre che, dividendo 35 per 7, il quoziente non può essere altro, che 5. Se poi si volesse, che col dividere 35 per 7 il quoziente fosse 6, allora il problema più che determinato riuscirebbe impossibile per causa dell' ultima condizione. Se verrà proposto di descrivere col dato raggio un cerchio, che abbia il diametro doppio d' esso raggio, il problema più che determinato avrà una condizione superflua; ma se si vorrà, che il diametro sia maggiore, o minore del doppio della data retta, che serve di raggio, il problema più che determinato più non si potrà risolvere.

Da quanto sovra è stato detto chiaramente si vede, che i problemi più che

determinati ſono viziosi, e che, venendo propoſti, o ſi debbono rigettare, o ſi debbono ſpogliare delle condizioni ſuperflue, e renderli in tal guiſa determinati.

137. Il metodo Analitico, con cui i Matematici riſolvono i loro problemi, conſiſte principalmente nell'artifizio delle equazioni, e per praticarlo convien valerſi delle ſeguenti regole, ed indirizzi generali.

1.° Si procurerà prima d'ogni coſa di comprendere chiaramente lo ſtato della queſtione, che ſi fa nel problema.

2.° Si diſtenderà un canone, o ſia regiſtro, in cui i dati del problema, o dicaſi le quantità cognite ſi individueranno colle prime lettere dell'alfabeto, o coi numeri, e le quantità incognite, che ſi ricercano, ſi eſprimeranno colle ultime lettere.

3.° Si pareggeranno le quantità cognite colle incognite in diverſe maniere, finchè rieſca di eſprimere le condizioni del problema con altrettante equazioni, quante ſono le incognite. Queſte equazioni ſi chiamano *Primitive*.

4.° Tutte le equazioni primitive del problema ſi ridurranno in altre *Derivative*, e queſte in una ſola, la quale, perchè rinchiude tutte le condizioni del problema,

Equazione Definitiva, o *Finale* ſi chiama, e contiene una ſola incognita.

5.° Si maneggerà l'equazione finale in modo, che ſi trovi il valore dell'incognita.

Come s' arrivi a comprendere chiaramente lo ſtato della queſtione.

138. Si giugne a comprendere chiaramente lo ſtato della queſtione col conſiderare attentamente tutte le condizioni poſte nel problema, e col diſtinguere le relazioni, che aver debbono le quantità cognite colle incognite. Dopo che ſi è ben inteſa la queſtione, e che ſi hanno preſenti tutte le condizioni, e le relazioni ſuddette, ſi diſtende poi il canone (§. 137. n. 2.), additando in eſſo le quantità con preciſione, e colla maggiore ſemplicità poſſibile nel modo, che ſegue.

Diſtendere il canone, o ſia denominare le quantità cognite, e le incognite, e regiſtrarle.

139. Siccome fralle quantità de' problemi propoſti altre ſono cognite, o date, ed altre incognite, o ricercate, così per facilmente diſtinguere le une dalle altre, ſi

ſogliono le prime denominare colle prime lettere dell'alfabeto a, b, c ec., o pure coi numeri, e le ſeconde colle ultime lettere x, y, z ec.

Per eſempio ſe ſia propoſto di trovare due numeri, la ſomma de' quali ſia 100, e la differenza 10,

Canone.

Somma 100. . .	$= a$
Differenza 10. .	$= c$
Numero maggiore	$= x$
Numero minore .	$= y$

ſi denominerà ciaſcheduna delle quantità date 100, e 10 con una delle prime lettere dell' alfabeto, cioè ſi potrà ſupporre la ſomma $100 = a$, e la differenza $10 = c$; indi ciaſcuna delle quantità incognite da ritrovarſi ſi denominerà con una delle ultime lettere, additando per eſempio il maggiore numero colla lettera x, ed il minore colla lettera y.

140. Occorre alle volte, che le quantità da regiſtrarſi nel canone ſi poſſono individuare in una maniera più ſemplice, la qual coſa ſi dee praticare, finchè ſi può, avvegnachè facilita il calcolo, che

in

in ſeguito ſi dee poi fare per trovare il valore dell' incognita. Per eſempio nell' antecedente problema, eſſendoſi rappreſentato il numero maggiore per x, il minore ſi potrà rappreſentare per $x - c$, ovvero per $a - x$; imperciocchè, eſſendo c la differenza, con cui il maggiore ſupera il minore, levando la differenza c dal maggiore x, il rimanente $x - c$ ſarà il minore: e perchè la ſomma dei due numeri è eſpreſſa per a, ſe da tale ſomma ſi leverà il numero maggiore x, il rimanente $a - x$ rappreſenterà altresì il minore.

Così ancora, ſe ſi dovrà trovare due quantità, la maggiore delle quali ſia tripla dell' altra, ſe la minore ſi additerà per x, ſarà più ſpediente rappreſentare la maggiore per $3x$, in vece di eſprimerla per y, o per z.

Eſprimere colle equazioni le condizioni poſte nel problema.

141. Denominate le quantità cognite, e le incognite nel modo, che precedentemente è ſtato inſegnato, ſi dovrà eſprimere con una equazione primitiva ciaſcheduna condizione poſta nel problema, formando in tal guiſa tante equazioni, quan-

te sono le condizioni suddette. Per esempio volendo esprimere colle equazioni le condizioni del problema (§. 139.), in cui si ricercano due numeri, la somma de' quali sia $100 = a$, e la differenza $10 = c$, ed essendosi registrato nel canone x pel numero maggiore, e y pel minore, siccome i due numeri da ritrovarsi insieme presi sono $= a$, così s'avrà l'equazione primitiva $x + y = a$; e poichè a tenore della seconda condizione il maggiore x supera il minore y per la quantità $= c$, così s' avrà la seconda equazione primitiva $x = y + c$. Pertanto a tenore delle due condizioni poste nel problema si sono formate le due equazioni primitive $x + y = a$, $x = y + c$.

142. Se sia proposto il seguente problema. La paga giornaliera del Generale colla doppia paga del Colonnello fanno ll. 28. Il triplo della paga del Generale meno il quadruplo della paga del Maggiore fanno ll. 16. La metà della paga del Colonnello unita alla paga del Maggiore sono lire 9. Cercasi la paga di ciascheduno di questi Uffiziali. Se nel fare il canone si chiamino le paghe incognite

del Generale $= x$
del Colonnello $= y$
del Maggiore $= z$
le lire 28 $= a$
16 $= b$
9 $= c$

Nell'adempiere la prima condizione del problema, s'avrà l'equazione $x + 2y = a$. Coll' adempiere la ſeconda condizione del problema s'avrà l'altra equazione $3x - 4z = b$, e finalmente coll'adempiere la terza condizione s'otterrà l'equazione $\frac{y}{2} + z = c$; col qual mezzo ſi ſaranno eſpreſſe le tre condizioni del problema colle tre equazioni primitive

1.ª $x + 2y = a$
2.ᵈᵃ $3x - 4z = b$
3.ª $\frac{y}{2} + z = c$

143. Occorre talvolta, che dall'eſpoſto nel problema non riſulta chiaramente come ſe ne poſſano eſprimere le condizioni colle equazioni. In ſimili riſcontri d'uopo è raccorrere alle proprietà delle grandezze, che già ſono note, affine di cercare ſe per mezzo di qualcheduna di queſte proprietà ſi può formare una equazione, che comprenda la condizione neceſſaria. Per eſempio eſſendo dati i numeri 8, e

12, trovare ad essi un terzo, ed un quarto proporzionale.

Si distenda il canone, e si chiami il terzo proporzionale incognito $= x$, ed il quarto proporzionale $= y$, il primo numero dato $8 = a$, il secondo $12 = c$; siccome dalla prima condizione del problema non risulta il modo di esprimerla con una equazione, così fa di mestiere ricordarsi delle cose già insegnate intorno le proprietà delle grandezze, cioè che, se tre grandezze sono proporzionali, il prodotto della prima nella terza è uguale al quadrato di quella di mezzo (§. 125.); e però sia $a : c :: c : x$, s' avrà per la prima condizione $a x = c^2$.

Col ricordarsi pure che, se quattro grandezze sono proporzionali, il prodotto dei due termini estremi è uguale al prodotto di quelli di mezzo (§. 122.), si dirà $a : c :: x : y$, e quindi s' esprimerà la seconda condizione del problema con quest' altra equazione $c x = a y$. Si avranno pertanto le due condizioni del problema espresse colle due equazioni primitive

1.ª $a x = c^2$

2.ª $c x = a y$

144. Altre volte poi si adempiscono alcune condizioni del problema col disten-

dere il canone con discernimento tale, che si schiva di accrescere il numero delle incognite (§. 140.), la qual cosa si farà osservare in varj riscontri, affinchè si pratichi poi in que'casi, che ne saranno suscettibili.

Ridurre tutte le equazioni primitive del problema alla equazione finale.

145. Per ridurre tutte le equazioni primitive del problema alla finale, convien valersi di uno, o più de' seguenti assiomi, affine di fare sparire, o dicasi esterminare le diverse incognite, e ridurle a una sola.

1.° Se due quantità sono uguali ad una terza, esse saranno uguali fra loro.

2.do Se a quantità uguali s'aggiugneranno, o da esse si leveranno quantità uguali, le somme, od i rimanenti saranno uguali.

3.° Se due quantità uguali si moltiplicheranno, o si divideranno per la stessa quantità, o per quantità uguali, i prodotti, od i quozienti saranno uguali.

4.° Se da quantità uguali si caveranno radici d'indice uguale, esse radici saranno uguali.

5.° Se quantità uguali s'eleveranno a potestà d'esponenti uguali, esse potestà saranno uguali.

6.° Se una quantità ſarà uguale ad un' altra, ſi potrà ſoſtituire indifferentemente l' una all' altra.

146. Premeſſi i diviſati aſſiomi, volendo ora ridurre a equazione finale le due primitive 1.ª $x + y = a$, 2.ᵈᵃ $x = y + c$ del problema (§. 141.), convien fare ſcomparire una delle incognite col laſciarla ſola, e poſitiva in un membro dell' equazione, e, traſportando nell'altro membro tutte le altre quantità, ſi ſoſtituirà queſto valore dell' incognita in quell' altra equazione, da cui ſi vuole eſterminare. Queſt' operazione, ſebben poſſa farſi ad arbitrio in quella delle equazioni primitive, che più piace, nulla di meno per maggior facilità ſi pratica nell' equazione la più ſemplice. Nel caſo noſtro ſi ha nella ſeconda equazione l' incognita x ſola, e poſitiva nel primo membro; e però per farla ſparire dalla prima equazione baſterà in vece di quella ſcrivere il ſuo valore uguale (§. 145. n. 6.) $y + c$, e s' avrà 1.ª $y + c + y = a$, e, corretta l'eſpreſſione, ſarà $2y + c = a$ equazione finale, che con una ſola incognita abbraccia le due condizioni del problema.

147. Per ridurre a equazione finale le due primitive (§. 143.), cioè 1.ª $ax = c^2$,

$2.^{da}$ $cx = ay$, converrà nella prima lasciare l'incognita x sola, e positiva. A tal fine si dividerà ciascun membro per a, e sarà $\frac{ax}{a} = \frac{c^2}{a}$, e, correggendo l'espressione, sarà $x = \frac{c^2}{a}$. Sostituiscasi questo valore di x nella seconda equazione, e sarà $c \times \frac{c^2}{a} = ay = \frac{c^3}{a}$ equazione finale, in cui più non compare l'incognita x, e nella quale si trovano inchiuse le due condizioni del problema.

148. Volendo ridurre a equazione finale le tre primitive del problema (§. 142.), cioè $1.^a$ $x + 2y = a$, $2.^{da}$ $3x - 4z = b$, $3.^a \frac{y}{2} + z = c$, si comincerà a fare scomparire x, e per ciò nella prima equazione, come la più semplice, si leverà $2y$ nei due membri dell'equazione (§. 145. n. 2.), e s'avrà

$1.^a$ $x + 2y - 2y = a - 2y$, e, correggendo l'espressione, sarà $1.^a$ $x = a - 2y$. Sostituiscasi questo valore di x nella seconda equazione (§. 145. n. 6.), in cui esso x trovasi moltiplicato per 3, e s'avrà $2.^{da}$ $3 \times \overline{a - 2y} - 4z = b$, e facendo l'attuale moltiplica, sarà $2.^{da}$ $3a - 6y - 4z = b$,

in cui più non compare l' incognita x.

Colla fatta operazione le tre equazioni primitive faranno ridotte a due, nelle quali trovansi due sole incognite, cioè 2.da $3a - 6y - 4z = b$ equazione derivativa, 3.a $\frac{y}{2} + z = c$ equazione primitiva.

Per esterminare ora l'incognita z si sceglierà la più semplice di queste due equazioni, cioè la terza, e levando in ciaschedun membro il termine $\frac{y}{2}$, s'avrà 3.a $\frac{y}{2} - \frac{y}{2} + z = c - \frac{y}{2}$, e, correggendo l' espressione, sarà 3.a $z = c - \frac{y}{2}$. Sostituiscasi ora questo valore di z nella seconda equazione $3a - 6y - 4z = b$; e siccome z trovasi moltiplicato per 4, così il suo valore uguale $c - \frac{y}{2}$ si moltiplicherà pure per 4, e s' avrà 2.da $3a - 6y - 4 \times \overline{c - \frac{y}{2}} = b$, e facendo l' attuale moltiplica, e, correggendo l' espressione, sarà 2.da $3a - 4y - 4c = b$ equazione finale, che abbraccia tutte le condizioni del problema, ed in cui trovasi la sola incognita y.

Trovare il valore dell' incognita nell' equazione finale.

149. Per trovare il valore dell' incognita in una equazione fa di meſtiere laſciare eſſa incognita in un membro ſola, e poſitiva, e libera da qualunque coefficiente, e diviſore, e traſportare tutte le altre quantità nell' altro membro dell' equazione; per lo che convien valerſi degli aſſiomi dati (§. 145.), cioè ſi dee far uſo della ſomma, o della ſottrazione, della moltiplicazione, o della diviſione, o pure inalzare la quantità a qualche poteſtà, eſtrarre radici, o finalmente praticare due, o più di queſte regole. Tali operazioni ſi dicono *Riſolvere l' equazione.*

Nel ridurre le equazioni primitive alla finale ſi è già data un'idea dell' uſo delle diviſate regole. Quanto ſi dirà nel ſeguito ſervirà a renderne familiare l' applicazione alla pratica.

150. Col ſommare ſi può fare, che un termine, che è in un membro dell' equazione, paſſi nell' altro ſenza punto togliere l' uguaglianza; laonde per far paſſare nel ſecondo membro il termine $-a$, che nell' equazione $x - a = b$ ſi trova nel primo, s' aggiugnerà la quantità a tanto all'

uno, quanto all'altro membro, e s'avrà $x - a + a = b + a$ (§. 145. n. 2.), e, correggendo l'espressione, s'avrà l'equazione $x = b + a$, ed in tale modo il termine $-a$, che era nel primo membro, si trova in quest'equazione nel secondo, come s'era proposto.

Se l'equazione proposta fosse $x + a = b$, per far passare il termine $+a$ nell'altro membro si sottrerrà $+a$ dall'uno, e dall'altro membro dell'equazione (§. 145. n. 2.), e s'avrà $x + a - a = b - a$, o sia $x = b - a$, dove il termine a, che nell'equazione proposta era nel primo membro, si trova in quest'ultima nel secondo.

151. Si dirà adunque per regola generalissima, che, qualunque volta occorrerà trasportare un termine dall'uno nell'altro membro dell'equazione, basterà scancellare esso termine da quel membro, in cui si trova, e scriverlo nell'altro col segno mutato.

152. Si risolvono in oltre le equazioni colla moltiplicazione, affine di liberarle dalle frazioni, che talvolta contengono (§. 145. n. 3.), il che si fa col moltiplicare tutti i termini dell'equazione pel denominatore d'ogni frazione, che trovasi nell'equazione. Se s'abbia l'equazione

$\frac{xd}{a} = b + c$, la quale si voglia liberare dalla frazione, si moltiplicheranno i due membri d' essa pel denominatore a della frazione, e s' avrà $\frac{axd}{a} = ab + ac$, e, correggendo l' espressione, s' avrà l' equazione $xd = ab + ac$. Così ancora, se sia proposta l' equazione $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = b$, la quale si dee liberare dalle frazioni, si moltiplicheranno tutti i termini d' essa per li denominatori 2, 3, e s' avrà l' equazione $\frac{6x}{2} + \frac{12x}{3} = 6b$, la quale, corretta l'espressione, si riduce a quest'altra $7x = 6b$.

Si usa la divisione per liberare l' incognita da un coefficiente diverso dall' unità. Per esempio, se s' abbia l' equazione $cx = d - a$, in cui si voglia liberare l'incognità x dalla quantità c, si dividerà l'uno, e l' altro membro dell' equazione per c (§. 145. n. 3.), e s' avrà $x = \frac{d-a}{c}$; parimente, se si divide l' uno, e l' altro membro dell'equazione $x + 2bx + cx = d + r$ per $1 + 2b + c$, si ha $x = \frac{d+r}{1+2b+c}$

153. Allorchè un' equazione contiene qualche radicale, si può da esso liberare coll' inalzare l' uno, e l' altro membro ad una potestà, in cui esponente sia lo stesso, che quello del radicale da togliersi (§. 145. n. 5.); e così, se l' equazione $\sqrt{aa - xx} = x - b$ si dee liberare dal segno radicale, s' eleverà l' uno, e l' altro membro al quadrato, e s'avrà $aa - x^2 = x^2 - 2bx + bb$; così ancora, se si dovrà liberare dai radicali l' equazione $\sqrt[3]{b^2 + \sqrt{x}} = a$, s' inalzerà l' uno, e l' altro membro al cubo, e s' avrà $b^2 + \sqrt{x} = a^3$, e trasportando b^2 nell'altro membro, s'avrà $\sqrt{x} = a^3 - b^2$, e quadrato ciascun membro di quest'equazione, s' avrà finalmente $x = a^6 - 2a^3b^2 + b^4$.

154. Si risolve l' equazione coll' estrazione di radici, allorchè l' incognita si trova inalzata a qualche potestà; a tal fine si cava dall' uno, e dall' altro membro la radice indicata dall' esponente della potestà dell' incognita (§. 145. n. 4.). Per trovare il valore di x nell' equazione $x^2 = aa$, si caverà la radice quadrata dall' uno, e dall' altro membro, e s' avrà $x = a$; per risolvere l' equazione $x^3 = a^3b$, si estrarrà la radice cubica, e sarà $x = a\sqrt[3]{b}$.

155. Occorre non di raro, che per risolvere un' equazione fa di mestiere valersi di due, o più delle precedenti regole; per esempio per risolvere l'equazione $3\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - m = b$; si comincia a far passare $-m$ nel secondo membro dell' equazione, e si ha $3\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} = b + m$, indi si moltiplica l' uno, e l' altro membro pel denominatore 2, e si divide pel numeratore 3, il che somministra l'equazione $\sqrt[3]{x^2} = \frac{2b + 2m}{3}$, ed inalzando l' uno, e l' altro membro al cubo, si ha $x^2 = \frac{8b^3 + 24b^2m + 24bm^2 + 8m^3}{27}$; e finalmente, cavando la radice quadrata, s' arriva ad avere

$$x = \sqrt{\frac{8b^3 + 24b^2m + 24bm^2 + 8m^3}{27}}.$$

156. Dopo d' aver trovato il valore dell' incognita nell' equazione finale, se per risolvere il problema se ne sono espresse le condizioni con due, o più equazioni primitive, converrà sostituirne il valore in una delle altre equazioni, in cui essa incognita si ritrovava con un' altra, affine di avere il valore di quest' altra in-

cognita; e se, ciò fatto, s'avrà ancora una terza incognita, s'opererà pure nella stessa maniera per averne il valore, e così di mano in mano: per esempio nel problema (§. 146.) l'equazione finale è $2y + c = a$, in cui, trovando il valore di y, si ha $y = \frac{a-c}{2}$. Sostituiscasi questo valore nella seconda equazione $x = y + c$, e s'avrà il valore di $x = \frac{a-c}{2} + c$, e, correggendo l'espressione, sarà $x = \frac{a+c}{2}$.

Nel problema del (§. 148.) l'equazione finale è $3a - 4y - 4c = b$; se in quest' equazione si troverà il valore di y reso positivo (§. 149.), sarà $\frac{3a-4c-b}{4} = y$. Sostituiscasi questo valore nella terza equazione $z = c - \frac{y}{2}$, e sarà $z = c - \frac{3a+4c+b}{8}$, e, corretta l'espressione, s'avrà $z = \frac{12c-3a+b}{8}$. Finalmente, se il ritrovato valore di y si sostituirà nella prima equazione $x = a - 2y$, s'avrà $x = a - 2 \times \frac{\overline{3a-4c-b}}{4}$, e correggendo l'es-

pressione sarà $x = \frac{4c - a + b}{2}$, e quindi si avranno i valori delle tre incognite.

CAPO II.

Risolvere i problemi numerici, le cui equazioni finali sono pure.

157. Ognorachè nell'equazione finale l'incognita si trova in un solo termine, come $x = a + b$, $y^2 = cm$, $z^3 = \frac{d^2fg - am^3}{c}$, o che, essendo essa incognita in due, o più termini, si trova elevata alla medesima potestà, come $bx - dx = \frac{ad}{f}$, $ay^2 + fy^2 = K^3 - d^2 l$, l'equazione si chiama *Pura*; ma se l'incognita si troverà in due, o più termini elevata a potestà diverse, come $z^2 + az = c^2$, $x^3 - cx^2 = fd^2 + b^3$, $y^3 + 25y = \frac{130}{7}$, l'equazione si dirà *Affetta*.

158. La massima potestà dell'incognita nell'equazione finale serve a distinguere il grado del problema. E però, se l'incognita avrà l'unità per esponente, il problema si dirà del primo grado, se l'espo-

nente maſſimo dell' incognita ſarà 2, il problema ſarà del ſecondo grado, e ſi dirà del terzo grado il problema, ſe il detto eſponente maſſimo ſarà 3, e così ſucceſſivamente.

Occorrendo poi, che l' incognita s' incontraſſe in tutti i termini dell' equazione finale, queſta ſi dividerà per l' incognita, che ha il minor eſponente, e il problema ſi dirà del grado, cui trovaſi elevata l'incognita in queſto quoziente. Per eſempio ſe l' equazione finale ſia $x^4 = a^3 x$, ſi dividerà per x, e s'avrà $x^3 = a^3$ di quoziente, in cui, eſſendo l' incognita elevata al terzo grado, ſi dirà, che il problema è del terzo grado; e così ancora, ſe s'abbia l' equazione finale $z^5 - a^2 z^3 = c z^4$, ſi dividerà per z^3, e s' avrà il quoziente $z^2 - a^2 = cz$, e quindi il problema ſarà di 2.do grado.

159. L' incognita nei problemi di primo grado non può avere che un valore poſitivo, o negativo; ma nei problemi di ſecondo grado, la cui equazione finale è pura, il valore della medeſima incognita ſi può prendere poſitivo, o negativo. Se nell' equazione $x^2 = 36$ ſi eſtrarrà la radice quadrata da ciaſchedun membro, s'avrà $x = \pm 6$, vale a dire che il valore di x ſi

ſi potrà prendere poſitivo, e negativo, giacchè in ambedue i caſi ſi ſoddisfa ſempre alle condizioni del problema.

La medeſima coſa dovrà dirſi di tutte le poteſtà poſitive, gli eſponenti delle quali ſono numero pari (§. 17.): ſe ſi eſtrarrà la radice quarta dall' equazione $z^4 = 2401$, s' avrà $z = \pm 7$; onde col pigliare queſto valore poſitivo, o negativo ſi ſoddisfa eſattamente alle condizioni del problema. Ma non potrà già dirſi l' iſteſſo riſpetto alle equazioni pure, in cui la poteſtà dell'incognita ha per eſponente un numero diſpari; imperciocchè, ſe queſta poteſtà ſarà poſitiva, tale ſarà anche la ſua radice, e, ſe la poteſtà ſarà negativa, la radice ſarà pure negativa. Eſtraendo la radice cubica dall'equazione $y^3=64$, s'avrà $y=4$, e, ſe l'equazione ſarà $y^3=-64$, la radice ſarà $y = -4$ (§. 17.)

160. Il valore dell' incognita, o dicaſi della radice, che ſi cava da una qualche poteſtà, è già ſtato diſtinto in *Reale*, ed *Immaginario* (§. 18.), e ſi è pure fatto oſſervare in detto paragrafo, che i valori immaginarj naſcono dal dover eſtrarre la radice quadrata da una quantità negativa. Ora, avendo fatto vedere nell' antecedente paragrafo, che nelle equazioni di ſe-

condo grado l'incognita ha due valori, giacchè la radice quadrata si può prendere a beneplacito positiva, o negativa, consegue, che, qualora s'incontrano delle immaginarie in qualche equazione, esse debbono per necessità essere sempre accoppiate due a due.

Da quì avviene, che nelle equazioni di quarto grado i valori dell' incognita possono essere tutti quattro reali, o tutti immaginarj, o pure due di essi essere reali, ed inmaginarj gli due altri; e così ancora nelle equazioni di sesto grado i valori dell' incognita possono essere tutti e sei reali, o tutti immaginarj, o pure due immaginarj, e quattro reali, o pure quattro immaginarj, e reali gli altri due, e così delle altre equazioni, in cui l' indice della potestà dell' incognita è espresso da un numero pari. Da ciò consegue, che i problemi di grado espresso da un numero pari non si possono sempre risolvere, ed è, quando le loro radici sono tutte immaginarie. Tale impossibilità nasce dall'essere assurde le condizioni poste nel problema.

Contrariamente le equazioni, in cui l'esponente dell' incognita è numero dispari, si possono sempre risolvere, stantechè l' incognita ha almeno un valore reale.

Si risolvono problemi del primo grado.

161. Per risolvere un problema non è in alcun modo necessario di conoscere da principio di qual grado egli sia, ma basta comprendere chiaramente lo stato della questione, indi distenderne il canone, e poscia esprimere le condizioni del problema colle equazioni primitive.

Ciò fatto, convien ridurre queste equazioni alla finale, la quale si maneggia poi colle date regole per avere il valore dell'incognita, e questo si va poi sostituendo nelle altre equazioni per avere il valore delle altre incognite (§. 156.). Le esercitazioni, che si faranno nella soluzione de' seguenti problemi, renderanno facilissimo l'uso delle addotte regole.

162. Due Bombardieri hanno gettato in un forte 150 bombe in modo, che il primo ne ha gettato 20 di più del secondo. Domandasi quante ne ha gettato ciascheduno d'essi.

Si cominci a considerare attentamente la questione, e, dopo d'essersene formata una idea chiara, e distinta, si distenda il canone, in cui sia

Canone.

Somma 150 $= a$
Differenza 20 $= c$

Il numero delle bombe gettate dal primo $= x$

Quelle gettate dal ſecondo $= y$.

Ciò fatto ſi rifletta, che le bombe gettate dal primo unite a quelle gettate dal ſecondo debbono eſſere $= a$, onde s'avrà l'equazione primitiva $x + y = a$; e ſiccome il numero x delle bombe, che ha gettate il primo, ſupera la quantità y del ſecondo per la differenza c, così s'avrà una ſeconda equazione primitiva $x = y + c$.

Per ricavare da queſte due primitive l'equazione finale del problema, baſta nella prima $x + y = a$ ſoſtituire in luogo di x il ſuo valore $y + c$, che ſi ricava dalla ſeconda, e ſi ha l'equazione finale $y + y + c = a$, o ſia $2y + c = a$. Si riſolva ora queſt' equazione col far paſſare $+ c$ nell' altro membro, e col dividerne per 2 l'equazione, ſi avrà $y = \frac{a-c}{2}$.

Per trovare poi il valore di x nella ſeconda equazione $x = y + c$, ſi ſoſtituirà $\frac{a-c}{2}$ in vece di y, e s'avrà $x = \frac{a-c}{2} + c$, o ſia $x = \frac{a+c}{2}$: ſe in vece delle lettere a, c ſe ne ſcriverà il valore numerico, s'avrà $y = \frac{150-20}{2} = 75 - 10 = 65$, ed

$x = \frac{150+20}{2} = 85$. Sicchè il numero delle bombe gettate dal primo sarà 85, ed il numero di quelle gettate dal secondo sarà 65, dove la somma di esse è 150, e la differenza 20, come s'è proposto.

163. Siccome ciascheduna delle lettere a, c può rappresentare qualsivoglia quantità, così si deduce il seguente corollario.

Data la somma, e la differenza di due quantità si troverà la maggiore con pigliare la metà della somma colla metà della differenza, e si troverà la minore, pigliando la metà della somma meno la metà della differenza.

L'uso di questa proposizione riesce soventi utile nel distendere il canone di un problema.

164. Se nel §. 162, dopo d'aver registrato nel canone x pel numero maggiore, si fosse espresso il numero minore per $x - c$, si sarebbe in tal guisa espressa una delle condizioni del problema (§.140.), e quindi colla sola equazione $x + x - c = a$ si sarebbe trovato a dirittura il valore del numero maggiore $x = \frac{a+c}{2}$, e, levando da questo la differenza $= c$, si sarebbe avuto $\frac{a+c}{2} - c = \frac{a-c}{2}$ pel valore del numero minore.

165. Due Cacciatori avendo preſo un certo numero di pernici, l'uno dice all'altro, ſe tu me ne rimetteſſi due delle tue, io ne avrei il doppio di quelle, che ti reſterebbero, e, ſe io te ne rimetteſſi due delle mie, tu ne avreſti tante, quante a me rimarrebbero. Si cerca il numero delle pernici, che ciaſcuno d'eſſi ha preſo.

Ben inteſo lo ſtato della queſtione ſi diſtenda il canone, e ſia x il numero delle pernici preſe dal primo, e z quelle del ſecondo; e perchè, ſe il ſecondo ne rimetteſſe due al primo, il primo ne avrebbe il doppio del ſecondo, così $x + 2$ ſarà doppio di $z - 2$, e moltiplicando $z - 2$ per 2, s'avrà $2z - 4$, e conſeguentemente $x + 2 = 2z - 4$ ſarà la prima equazione. In oltre, ſiccome il primo rimettendone due al ſecondo, queſti ne avrà tante, quante rimarranno al primo, conſegue, che $x - 2 = z + 2$ ſarà la ſeconda equazione: dalla prima equazione $x + 2 = 2z - 4$ ſi ricava $x = 2z - 6$; ſe ſi ſoſtituiſce queſto valore di x nella ſeconda, ſi ha l'equazione finale $2z - 6 - 2 = z + 2$, e correggendo l' eſpreſſione, e, facendo paſſare z nel primo membro, e le cognite nel ſecondo (§. 149.), ſi ha $z = 10$, e, ſoſtituendo il valore di z nell'equazio-

ne $x = 2z - 6$, si trova $x = 14$; e però il primo avrà preso 14 pernici, e il secondo 10; vedendosi, che, se da 10 se ne levano 2, vi rimarrà 8, e che, se a 14 se ne aggiungono 2, s'avrà 16, che è il doppio di 8; siccome ancora, se dal primo, che ne ha 14, se ne levano 2, vi rimarrà 12, e se al secondo, che ne ha 10, s'aggiungano le due levate dal primo, s'avrà altresì 12, il tutto secondo le condizioni poste.

166. Un Padre di famiglia, discorrendo dell' età de' suoi tre figliuoli, dice così: gli anni del primo e del secondogenito insieme sono 26, quelli del secondo e terzogenito insieme sono 18, e quelli del primo e terzo sono 24, cercasi l' età di ciascheduno di questi figliuoli.

Dopo d' aver ben compreso lo stato della questione, si distenda il canone, in cui il primo numero da ritrovarsi sia x, il secondo y, il terzo z, e suppongasi $26 = a$, $18 = b$, $24 = c$; ciò fatto si rifletta, che la somma del primo, e del secondo deve essere uguale 26, e però sarà $x + y = a$ prima equazione. Siccome la somma del secondo, e del terzo deve essere uguale 18, s' avrà $y + z = b$ per

la seconda equazione, e finalmente, poichè la somma del terzo, e del primo deve essere uguale 24, s'avrà $z + x = c$ per la terza equazione.

Ora da queste tre equazioni primitive se ne debbono ricavare delle derivative per ridurle poi all'equazione finale (§. 148.): a tal fine se ne pigli una delle primitive, e per esempio la seconda $y + z = b$, e, trasportando y nell'altro membro, s'avrà $z = b - y$; sostituiscasi questo valore di z nella terza equazione, si avrà la derivativa $b - y + x = c$. Con tal modo di operare in vece delle tre prime equazioni se ne avranno due sole, cioè $x + y = a$, $b - y + x = c$, nelle quali più non si trova l'incognita z.

Nella prima di queste due equazioni si trovi il valore di $x = a - y$, e si sostituisca nella seconda, s'avrà $b - y + a - y = c$ per l'equazione finale, nella quale, facendo passare l'incognita nel secondo membro, e c nel primo, sarà $b + a - c = 2y$, e $\frac{b + a - c}{2} = y$. Ritrovato in tal guisa il valore di y, si sostituisca nella equazione primitiva $x + y = a$, sarà $x + \frac{b + a - c}{2} = a$, e facendo passare le quantità cognite nel

ſecondo membro, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà $x = \frac{a-b+c}{2}$.

Nella ſeconda equazione $z = b - y$ ſi ſoſtituiſca pure il ritrovato valore di y, e s' avrà $z = b - \frac{b - a + c}{2}$, o ſia $z = \frac{b-a+c}{2}$. Se in vece delle lettere ſe ne ſcriverà il valore numerico, ſarà $x = \frac{a+c-b}{2} = \frac{26+24-18}{2} = 16$; $y = \frac{a+b-c}{2} = \frac{26+18-24}{2} = 10$; e finalmente $z = \frac{b+c-a}{2} = \frac{18+24-26}{2} = 8$. Adunque dei tre numeri ricercati il primo ſarà 16, il ſecondo 10, il terzo 8, giacchè la ſomma del primo 16, e del ſecondo 10 è 26, la ſomma del ſecondo 10, e del terzo 8 è 18, e la ſomma del terzo 8, e del primo 16 è 24, come s' era propoſto.

167. L' addotto problema ſi può riſolvere in un'altra maniera più ſemplice col diſtendere il canone in modo, che contenga una ſola incognita. A tal fine ſia come ſopra la ſomma del primo, e del ſecondo $= a$, la ſomma del ſecondo, e

del terzo $= b$, e la ſomma del primo, e del terzo $= c$, ſi chiami il primo $= x$, il ſecondo ſarà $a - x$, ed il terzo $c - x$, e però la ſomma del ſecondo, e del terzo ſarà $a + c - 2x$, ma queſta ſomma deve eſſere $= b$; adunque s'avrà $a + c - 2x = b$, e facendo paſſare $- 2x$ nel ſecondo membro, e b nel primo, riſulterà $a + c - b = 2x$, e dividendo per 2, s'avrà $\frac{a + c - b}{2} = x$ pel valore del primo; e poichè il ſecondo numero da ritrovarſi è $a - x$, ſe in vece di x ſi ſoſtituiſce il ſuo valore $\frac{a + c - b}{2}$, ſi ha $a - \frac{a + c - b}{2}$, o ſia $\frac{a - c + b}{2}$ pel valore del ſecondo; nella ſteſſa maniera ſoſtituendo il valore di x, ſi troverà, che il valore del terzo $c - x$ ſarà $c - \frac{a + c - b}{2}$, o ſia $\frac{c + b - a}{2}$, le quali quantità ſono le medeſime, che ſi ſono ricavate col primo modo d' operare (§. 166.).

168. Si è ſpedito un diſtaccamento di 100 uomini ſomminiſtrati dai Reggimenti di Piemonte, la Marina, e Sardegna. Il triplo di quelli di Piemonte meno il qua-

druplo della Marina, più un quinto di quelli di Sardegna compongono 34 uomini, la metà di quelli di Piemonte coi due terzi della Marina oltrepassano di cinque uomini il doppio di quelli di Sardegna: cercasi quanti uomini ha somministrato ciaschedun Reggimento.

Dopo d'aver ben compreso lo stato della questione, se ne distenda il canone, supponendo i soldati somministrati da Piemonte $= x$, quelli della Marina $= y$, e gli altri somministrati da Sardegna $= z$. Ciò fatto s'individueranno i dati del problema colle prime lettere, o pure si farà uso a dirittura dei numeri cogniti, e si esprimeranno le condizioni del problema colle tre seguenti equazioni primitive

1.ª $x + y + z = 100$.

2.da $3x - 4y + \frac{z}{5} = 34$.

3.ª $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} - 5 = 2z$.

In una delle tre equazioni, e per esempio nella prima, ove riesce più facile l'operazione, si cominci a trovare il valore di una delle tre incognite, e sia quello di x, s'avrà 1.ª $x = 100 - y - z$. Sostituiscasi questo valore di x nelle altre due equazioni, e sarà

$2.^{da}\ 3 \times \overline{100 - y - z} - 4y + \frac{z}{y} = 34.$

$3.^{a}\ \frac{100 - y - z}{2} + \frac{2y}{3} - 5 = 2z.$

Si facciano le attuali moltipliche, si liberino l'equazioni dai rotti, e si correggano le espressioni, s' avrà

$2.^{da}\ 1500 - 35y - 14z = 170.$

$3.^{a}\ 270 + y = 15z.$

nelle quali l'incognita x più non compare.

In una di queste equazioni derivative si trovi il valore di quell'incognita, ove si scorge più semplice l'operazione, e per esempio nella 3.^{a}, s'avrà $y = 15z - 270$; si sostituisca questo valore di y nella seconda derivativa, e sarà

$2.^{da}\ 1500 - 35 \times \overline{15z - 270} - 14z = 170,$

o sia $1500 - 525z + 9450 - 14z = 170$, e col far passare 170 nel primo membro, e z nel secondo, affine di avere quest'incognita positiva, sarà, dopo d' aver corretta l' espressione,

$2.^{da}\ 10780 = 539z$, e quindi

$2.^{da}\ \frac{10780}{539} = z = 20.$ Si sostituisca questo valore di z nella equazione

$3.^{a} y = 15z - 270$, e sarà

$y = 15 \times 20 - 270 = 300 - 270 = 30.$

Finalmente, se nella prima equazione

$x = 100 - y - z$ ſi ſoſtituiranno i valori ritrovati di y, e z, s' avrà quello di $x = 100 - 30 - 20 = 50$. Sicchè i Soldati ſomminiſtrati dal Reggimento Piemonte ſaranno 50, 30 quelli della Marina, e 20 quelli di Sardegna.

169. Se dopo d'aver notato nel canone

I Piemonteſi $= x$.

La Marina $= y$.

ſi foſſe regiſtrato $100 - x - y$ per li ſoldati di Sardegna, ſi ſarebbe con ciò adempiuta una condizione del problema (§. 144.), onde ſi ſarebbero avute due ſole equazioni, e quindi la ſoluzione del problema ſarebbe riuſcita più ſemplice.

170. Nei precedenti problemi è riuſcito coſa facile l'eſprimerne le condizioni colle equazioni; ma nei due ſeguenti fa di meſtiere uſare un qualche raziocinio per ridurre il problema a equazione.

Un Corriere partì per Napoli con ordine di fare 30 miglia per giorno. Dal medeſimo luogo quattro giorni dopo ne fu ſpedito un altro con ordine di fare 40 miglia per giorno; ſi ricerca in quanti giorni il ſecondo giugnerà il primo. Ben inteſo lo ſtato della queſtione ſuppongaſi $30 = a$, $40 = b$, $4 = c$, il numero dei giorni, che impiegherà il ſecondo per

giugnere il primo ſia $= x$; perchè il primo è partito quattro giorni avanti del ſecondo, il viaggio fatto dal primo, avanti che partiſſe il ſecondo, ſarà $a \times c$, e ſiccome il ſecondo deve giugnere il primo nel tempo x, così il viaggio, che il primo ha ancor da fare dopo la partenza del ſecondo, ſarà $a \times x$, perciò tutto il viaggio, che il primo avrà fatto, quando ſarà giunto dal ſecondo, ſarà $ac + ax$; e poichè il ſecondo deve giugnere il primo nel tempo x, ſarà bx il viaggio fatto dal ſecondo, qualora avrà giunto il primo; ma, quando il ſecondo raggiugne il primo, il ſuo viaggio è uguale a quello del primo, adunque s' avrà l' equazione $ac + ax = bx$, e facendo paſſare ax nel ſecondo membro, s' avrà $ac = bx - ax$, e dividendo per $b - a$, ſarà $\frac{ac}{b-a} = x$, e ſoſtituendo i numeri in luogo delle lettere, ſi troverà $\frac{30 \times 4}{40-30} = x$, o ſia $x = \frac{30 \times 4}{40-30} = \frac{120}{10} = 12$; ſicchè in 12 giorni il ſecondo avrà giunto il primo; eſſendo ancora manifeſto, che, ſe il ſecondo ha viaggiato 12 giorni, il primo avrà viaggiato 16 per eſſere partito quattro

giorni avanti; e perchè il ſecondo deve fare 40 miglia per giorno, tutto il viaggio del ſecondo ſarà $12 \times 40 = 480$, ma il primo ne deve fare ſolamente 30 per giorno, adunque tutto il viaggio del primo ſarà $16 \times 30 = 480$.

171. Un trafficante ha due qualità di formento, una delle quali vale ll. 20 il ſacco, e l' altra vale ll. 15; egli ne vuole inviare ſul mercato 36 ſacchi, meſcolando queſte due qualità per vendere il meſcuglio a ll. 18 il ſacco. Cercaſi quanto ne dovrà prendere di ciaſcheduna qualità.

Dopo d'aver concepito lo ſtato della queſtione ſi diſtenda il canone, e ſia ll. $20 = a$, $15 = b$, $18 = c$, $36 = d$; la quantità del formento di minor prezzo, che ſi vuole meſcolare coll' altra, ſia $= x$, ſarà $d - x$ la quantità del prezzo maggiore. Se ſi moltiplica x per b ſi ha nel prodotto bx il valore del formento di minor prezzo, e moltiplicando $d - x$ per a, ſi ha nel prodotto $ad - ax$ il valore del formento di maggior prezzo; e però la ſomma d'eſſe due quantità ſarà $bx + ad - ax$; ma a tenore della condizione del problema queſto prezzo dee eſſere uguale al prodotto cd, cioè alli ſacchi 36 molti-

plicati per ll. 18; adunque s'avrà l'equazione $bx + ad - ax = cd$; e ſiccome $b - a$ è una quantità negativa, perchè $b < a$, così per avere l'incognita poſitiva ſi traſporterà $bx - ax$ nel ſecondo membro, e ſi farà paſſare cd nel primo, e s'avrà $ad - cd = ax - bx$, e dividendo per $a - b$, s'avrà $\frac{ad-cd}{a-b} = x$ quantità del formento del minor prezzo, e ſarà $d - \frac{ad-cd}{a-b} = \frac{cd-bd}{a-b}$ la quantità del formento di maggior prezzo.

Se in vece delle lettere ſi ſoſtituiranno i numeri dati, ſi troverà, che ſi debbono prendere ſacchi $14\frac{2}{5}$ del formento di minor qualità, e ſacchi $21\frac{3}{5}$ della qualità migliore, i quali inſieme meſcolati, e venduti a ll. 18 il ſacco daranno ll. 648, prezzo, che ſi ricaverebbe, ſe ſi vendeſſero ſacchi $14\frac{2}{5}$ a ll. 15 ciaſcuno, e ſacchi $21\frac{3}{5}$ a ll. 20 ognuno.

Si

172. Due giocatori hanno messo in fondo un certo numero di doppie, di maniera che quelle poste dal primo uguagliavano li $\frac{4}{5}$ di quelle poste dal secondo, e, se si moltiplicano fra loro questi due fondi, costituiscono doppie 2880. Essi ne hanno guadagnato 675. Cercasi il capitale, ed il guadagno d'ognuno d'essi.

Dopo d'essersi formata una idea chiara dello stato della questione, si distenda il canone, e sia $4x$ il fondo del primo, sarà $5x$ quello del secondo, e però, moltiplicando questi due capitali fra di loro, s'avrà $20x^2$ di prodotto, che dee essere uguale a 2880; sicchè s'avrà l'equazione $20x^2 = 2880$, e dividendo per 20, sarà $x^2 = 144$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, sarà $x = \pm 12$; ma perchè il fondo del primo egli è $4x$, e quello del secondo $5x$, così moltiplicando il 12 per 4, s'avrà 48 pel capitale del primo, e moltiplicando 12 per 5, s'avrà 60 pel capitale del secondo.

Ciò fatto, si usi la regola di Compagnia col sommare i due capitali insieme per avere 108, indi s'instituisca la proporzione

$108 : 675 :: 48 : \frac{48 \times 675}{108}$, cioè la somma 108 stà al guadagno totale 675, come 48 capitale del primo stà al suo guadagno particolare, che si troverà di 300 doppie, e quindi il guadagno del secondo sarà di doppie 375.

173. Si sono costrutte tre batterie di cannoni, delle quali si sa, che moltiplicando il numero de' cannoni messi nella prima per quelli della seconda si ha 640; moltiplicando i cannoni della prima per quelli della terza si ha 448, e moltiplicando i pezzi della seconda batteria per quelli della terza si ha 280. Cercasi quanti cannoni siansi messi in ciascuna batteria.

Suppongansi i cannoni della prima batteria $= x$, quelli della seconda $= y$, e quelli della terza $= z$, s' avranno le tre seguenti equazioni.

$$1.^{a}\ xy = 640$$
$$2.^{da}\ xz = 448$$
$$3.^{a}\ yz = 280$$

Si cominci a trovare il valore di un'incognita in una di queste equazioni, e per esempio il valore di x nella prima, sarà $1.^{a}\ x = \frac{640}{y}$, e sostituito questo valore di x nella $2.^{da}$ equazione, sarà $\frac{640z}{y} = 448$;

e liberando l'equazione dal divisore y, sarà $640z = 448y$; si avranno adunque le due seguenti equazioni con due sole incognite, cioè

2.da $640z = 448y$

3.^{a} $yz = 280$

Nella meno composta di queste due equazioni si trovi il valore di z, o di y, e per esempio nella 3.^{a} si faccia $y = \frac{280}{z}$, si sostituisca il valore di y nella 2.da equazione, s'avrà $640z = 448 \times \frac{280}{z}$, e liberando l'equazione dal denominatore z, e dividendo per 640, s'avrà $z^2 = \frac{448 \times 280}{640} = 196$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, sarà $z = 14$. Si sostituisca questo valore di z nella terza equazione $y = \frac{280}{z}$, e sarà $y = \frac{280}{14} = 20$: finalmente si sostituisca il valore di y nella prima equazione $x = \frac{640}{y}$, s'avrà $x = \frac{640}{20} = 32$. E però saranno 32 i cannoni della prima batteria, 20 quelli della seconda, e 14 nella terza.

174. Si desidera sapere quale sia l'età del padre, della madre, e del figlio me-

diante i ſeguenti dati. Se ſi moltiplica l'età del padre per quella della madre, e del figlio ſi ha 9600 di prodotto; moltiplicando l'età del padre pel quadrato dell'età della madre s'ottiene il prodotto 36000; e, ſe ſi moltiplica l'età della madre pel quadrato dell'età del figlio, ſi ha 1920.

Sia l'età del padre $= x$

L'età della madre $= y$, e

L'età del figlio $= z$, s'avranno le tre equazioni

1.ª $xyz = 9600$

2.ᵈᵃ $xy^2 = 36000$

3.ª $yz^2 = 1920$

Si cominci a trovare il valore di una delle incognite, e per eſempio di y nella terza equazione, ſarà $y = \frac{1920}{z^2}$. Soſtituiſcaſi queſto valore nelle altre due equazioni, e s'avrà

1.ª $xz \times \frac{1920}{z^2} = 9600$

2.ᵈᵃ $x \times \frac{\overline{1920}^2}{z^4} = 36000$,

e correggendo le eſpreſſioni, e liberando le equazioni dai diviſori, ſarà

1.ª $1920x = 9600z$

2.ᵈᵃ $3686400x = 36000z^4$.

Si trovi il valore di x nella più ſemplice

equazione, cioè nella prima, e s' avrà $x = \frac{9600z}{1920} = 5z$. Si sostituisca questo valore di x nella 2.da equazione, s' avrà $3686400 \times 5z = 36000z^4$, e dividendo tutta l' equazione per $5z$ (§. 158.), sarà $3686400 = 7200z^3$, o sia $\frac{3686400}{7200} = 512 = z^3$, ed estratta la radice cubica da ambe le parti, si ha $8 = z$.

Se il ritrovato valore di z si sostituirà nella prima equazione, s'avrà $x = 5 \times 8 = 40$, e col sostituire il valore di z nella terza equazione, s' avrà $y = \frac{1920}{8 \times 8} = 30$. E però l'età del padre sarà di 40 anni, quella della madre sarà di anni 30, e di 8 anni l' età del figliuolo.

175. Un Cannoniere ha ricevuto una gratificazione equivalente ai $\frac{3}{4}$ di quella, che è stata data al Caporale. Se si moltiplicherà la gratificazione dell'uno per quella dell' altro, e il prodotto si eleverà al quadrato, ed a questo s' aggiugnerà 336, s' avrà il numero 12000. Cercasi quale sia la gratificazione d' ognuno d' essi.

Se la gratificazione del Cannoniere sia $= 3x$, quella del Caporale sarà $= 4x$,

e però il prodotto di queste due gratificazioni sarà $12x^2$, ed elevando questa quantità al quadrato, s' avrà $144x^4$, cui aggiugnendo 336, s' avrà l' equazione $144x^4+336=12000$, o sia $x^4=\frac{12000-336}{144}=81$, ed estratta la radice quarta, sarà $x=3$; o pure si potrà estrarre la radice quadrata, e s' avrà $x^2=9$, ed estratta di nuovo la radice quadrata da quest' ultima equazione, sarà come prima $x=3$. Ora, siccome nel canone si è espressa per $3x$ la gratificazione del Cannoniere, e per $4x$ quella del Caporale, ne consegue, che la gratificazione del Cannoniere sarà $3\times3=9$, e quella del Caporale sarà $3\times4=12$.

176. Cinque Negozianti, avendo fatto società, hanno messo in fondo un certo numero di Lisbonine in modo, che il capitale del secondo è doppio di quello del primo, il capitale del terzo è triplo del primo, quadruplo quello del quarto, e quintuplo quello dell' ultimo. Se si moltiplica il quadrato del capitale del primo pel quadrato del capitale del terzo, e questo prodotto si moltiplica ancora pel capitale del quinto si ha il numero 35831808. S' addimanda quale sia il capitale di ciascheduno.

Se il capitale messo dal primo si chiami $= x$, sarà quello del secondo $= 2x$, del terzo $= 3x$, del quarto $= 4x$, e dell' ultimo $= 5x$; e però sarà il quadrato del primo $= x^2$, ed il quadrato del terzo $= 9x^2$, e quindi il prodotto di questi due numeri sarà $9x^4$, che moltiplicato per $5x$ darà $45x^5$, quantità, che per essere uguale al numero cognito somministrerà l' equazione $45x^5 = 358318080$, e dividendo per 45, s' avrà $x^5 = 7962624$, ed estratta da ambe le parti la radice quinta, sarà $x = 24$ capitale del p.^{mo}, e quindi sarà 48 il capitale del 2.do, 72 il capitale del terzo, 96 il fondo del quarto, e 120 il fondo del quinto.

CAPO III.

Risolvere i problemi numerici di grado superiore al primo, le cui equazioni finali sono affette.

177. Sebbene, come già si disse (§. 161.), per ridurre un problema a equazione finale non sia necessario di conoscere da principio di qual grado egli sia, nulladimeno questa cognizione riesce sovente utile nei problemi molto composti per distenderne il

canone in modo, che l' equazione finale venga abbaſſata più, che ſi può. A tal fine convien ſapere, che in ciaſchedun grado evvi un problema generale, cui tutti gli altri dello ſteſſo grado ſi riferiſcono. Tutti i problemi del primo grado ſi riducono a queſto generaliſſimo. A due date grandezze trovare una terza proporzionale, o pure a tre date grandezze trovare una quarta proporzionale.

Tutti i problemi del ſecondo grado ſi riducono a queſto generaliſſimo. Date due grandezze trovare una proporzionale di mezzo.

Tutti i problemi del terzo grado ſi riducono a queſto generaliſſimo. Date due grandezze trovare due proporzionali di mezzo.

E così ancora tutti i problemi del quarto grado ſi riducono a trovare tre proporzionali di mezzo fra due date grandezze, e tutti i problemi del quinto grado ſi riducono a trovare quattro proporzionali di mezzo fra due date grandezze, e così ſucceſſivamente.

178. Ma perchè la maniera, con cui ſono eſpreſſi i problemi particolari, naſconde il più delle volte la relazione, che queſti hanno col problema generaliſ-

ſimo, cui eſſi particolari ſi riferiſcono, così per individuare il grado, al quale il problema propoſto s' appartiene, ſi danno i ſeguenti indirizzi.

Ognivoltachè le incognite ſi ſommano, o ſi ſottrano vicendevolmente, il problema rieſce del primo grado. Se le incognite ſi moltiplicano fra loro due a due, o ſe ſi moltiplicano una volta in ſe medeſime, il problema rieſce di ſecondo grado; e rieſce poi del terzo grado il problema, qualora le incognite ſi moltiplicano tre a tre, o pure che un' incognita ſi moltiplica due volte in ſe medeſima; e così il problema rieſce del quarto grado, qualora le incognite ſi moltiplicano quattro a quattro, e rieſce del quinto grado, ſe le incognite ſi moltiplicano fra di loro cinque a cinque, o pure che l' incognita ſi moltiplica quattro volte in ſe medeſima, e così di mano in mano. Coll' eſaminare i problemi dati nel Capo antecedente s'avrà un riſcontro di queſta teoria.

179. Allorchè un' incognita moltiplica un' altra incognita, l' equazione rieſce pura; ma ſe un' incognita moltiplica una quantità compoſta di un' altra incognita, e di una, o più cognite, o pure che due quantità compoſte d' incognite, e di co-

gnite ſi moltiplicano fra loro, allora l'equazione rieſce ſempre affetta.

Eſterminare l' incognita nelle èquazioni di grado ſuperiore al primo.

180. Nel ridurre a equazione finale le primitive di un problema di grado ſuperiore al primo ſi dee prima d' ogni coſa, come già ſi diſſe, ſcegliere fra eſſe primitive la più ſemplice, e, trovato il valore dell' incognita, ſoſtituirlo nelle altre equazioni più compoſte; e così di mano in mano, finchè col ridurre tutte le equazioni s' arrivi alla finale: ma perchè in queſti maneggi ſi poſſono uſare dei ripieghi diverſi dalli fin quì ſpiegati, mediante i quali ſi rendono aſſai più ſemplici le eſpreſſioni, così ne addurremo alcuni eſempj, e faremo oſſervare, che tutto queſto maneggio dipende ſempre dagli aſſiomi regiſtrati (§. 145.).

181. Abbianſi le due equazioni primitive di un qualche problema.

$$1.^{a}\ x^2 - z^2 = a$$

$$2.^{da}\ 2x^2 + 2z^2 = c.$$

Nella prima ſi trovi il valore di $x^2 = a + z^2$, e queſto ſi ſoſtituiſca nella ſeconda equazione, s' avrà $2a + 2z^2 + 2z^2 = c$,

e correggendo l'espressione, e dividendo per 4, s'avrà l'equazione finale $z^2=\frac{c-2a}{4}$, e sostituendo questo valore nella prima equazione $x^2=a+z^2$, si ha $x^2=a+\frac{c-2a}{4}=\frac{c+2a}{4}$, e quindi $x=\frac{\sqrt{c+2a}}{2}$, e $z=\frac{\sqrt{c-2a}}{2}$.

182. Abbiansi le due equazioni primitive di un problema

$$1.^a \ xz=a$$
$$2.^{da} \ x^2+z^2=c$$

Se nella prima si trova il valore di $x=\frac{a}{z}$, e questo si sostituisce nella seconda, si ha $\frac{a^2}{z^2}+z^2=c$, e facendo scomparire il rotto, risulta $a^2+z^4=cz^2$, equazione affetta di quarto grado.

183. Se in vece di maneggiare col solito indirizzo le due equazioni

$$1.^a \ xz=a$$
$$2.^{da} \ x^2+z^2=c$$

proposte nell'antecedente paragrafo si useranno i seguenti ripieghi, si otterrà a dirittura una equazione finale di secondo grado affetta.

Si moltiplica la prima equazione per 2, e si ha $2xz = 2a$, si somma indi quest' equazione colla seconda, e si ha $x^2 + 2xz + z^2 = c + 2a$, e cavando la radice quadrata da ambedue i membri si ha $x + z = \sqrt{c+2a}$. Se poi si sottrerrà l' equazione $2xz = 2a$ dalla seconda, s'avrà $x^2 - 2xz + z^2 = c - 2a$, e cavando la radice quadrata, si avrà $x - z = \sqrt{c-2a}$. Si sommi ora questa radice coll' altra ritrovata, e sarà $2x = \sqrt{c+2a} + \sqrt{c-2a}$, equazione finale, in cui, essendo $x = \frac{\sqrt{c+2a} + \sqrt{c-2a}}{2}$, basta sostituire questo valore di x nella prima equazione $xz = a$ per avere il valore di $z = \frac{2a}{\sqrt{c+2a} + \sqrt{c-2a}}$.

184. Se nell'adempiere le condizioni di un qualche problema si sono ottenute le due equazioni primitive

$$1.^a \quad x^2 = ay$$
$$2.^{da} \quad cx + x^2 = xy + y^2.$$

Si scelga la prima, come la più semplice, in cui si estermini y, e s' avrà $\frac{x^2}{a} = y$; sostituiscasi questo suo valore nella seconda equazione, e sarà

$2.^{da} \quad cx + x^2 = \frac{x^3}{a} + \frac{x^4}{a^2}$, e togliendo le fra-

zioni, e dividendo per x (§. 158.), s'avrà la finale $a^2 c + a^2 x = a x^2 + x^3$.

185. Qualora poi l' incognita da eſterminarſi ſi trova nell' una, e nell' altra equazione elevata a grado ſuperiore, fa d' uopo in tal caſo ſcegliere l' equazione, in cui l'incognita da eſterminarſi aſcende a grado minore, e queſta ſi moltiplicherà per qualche poteſtà della medeſima incognita, acciocchè nell' una, e nell' altra equazione l' incognita, che ſi vuol fare ſcomparire, aſcenda alla medeſima maſſima poteſtà; indi trovato il valore della maſſima poteſtà in un' equazione, ſi ſoſtituirà nell' altra, e s' avrà un' equazione, dove l'incognita da eſterminarſi aſcenderà a qualche grado minore del maſſimo, e così replicando la medeſima operazione, s' arriverà finalmente ad avere un' equazione, nella quale l' incognita aſcenderà ſolamente al primo grado; ſicchè, ſoſtituendo poi nell' una, o nell' altra delle due equazioni i valori ritrovati dell' incognita da eſterminarſi, s' avrà un' equazione, dove più non apparirà l' incognita ſuddetta.

186. Per darne alcuni eſempj, ſieno le due equazioni primitive di un problema.

1.ª $x^2 = a y + y^2$

2.da $x^3 + axy = y^3$ da ridursi in equazione finale; si scelga la prima, come la più semplice, per esterminarvi l' incognita x, e si moltiplichi quest' equazione per x, affinchè nel prodotto $x^3 = axy + xy^2$ s' abbia la massima potestà di x uguale alla medesima potestà, che incontrasi nella seconda equazione, in cui in vece di x^3 si scriverà il suo valore $axy + xy^2$ ricavato dalla prima, e s' avrà $axy + xy^2 + axy = y^3$, e correggendo l' espressione, e dividendo per y (§. 158.), s' avrà $2ax + xy = y^2$, e trovando in questa il valore di x, sarà $x = \frac{y^2}{2a + y}$. Si sostituisca questo valore in una delle due proposte, e per esempio nella prima, come la più semplice, sarà

$\frac{y^4}{y^2 + 4ay + 4a^2} = ay + y^2$, e facendo sparire il rotto, e riducendo l' equazione secondo le regole ordinarie, s' avrà $5y^2 + 8ay = -4a^2$ per l' equazione finale.

187. Sieno proposte le due equazioni primitive di un problema.

1.^{a} $x^2 = y^2 - ay$

2.da $x^4 + ax^3 = ay^3 + y^2x^2$ per avere l' equazione finale; si scelga la prima, co-

me la più semplice, ed, affine di esterminare x, si moltiplichi questa per x^2, s' avrà $x^4 = x^2 y^2 - x^2 a y$, sostituiscasi il valore di x^4 nella seconda equazione, e questa diventerà $x^2 y^2 - x^2 a y + a x^3 = a y^3 + y^2 x^2$, e correggendo l'espressione, sarà $x^3 = y^3 + y x^2$; si moltiplichi di nuovo la prima equazione per x, poichè la massima potestà di x si trova ridotta al terzo grado nella seconda equazione, sarà $x^3 = x y^2 - x a y$, e sostituendo questo valore nell' ultima equazione ottenuta $x^3 = y^3 + y x^2$, sarà $x y^2 - a x y = y^3 + y x^2$, o sia $x y - a x = y^2 + x^2$. Finalmente, se in quest' equazione in vece di x^2 si scriverà il suo valore $y^2 - a y$ dedotto dalla prima equazione, s' avrà $x y - a x = 2 y^2 - a y$, ed $x = \frac{2y^2 - ay}{y - a}$; onde, sostituendo questo valore di x nella più semplice delle proposte equazioni, cioè nella prima, s' avrà $\frac{4y^4 - 4ay^3 + a^2y^2}{y^2 - 2ay + a^2} = y^2 - a y$, la quale ridotta colle solite maniere diventa $3 y^3 - a y^2 - 2 a^2 y = - a^3$, equazione finale del problema.

188. Siano proposte le due equazioni primitive

1.ª $x^2 + x y + y^2 = a x$

2.da $x^4 + x^2 y^2 + y^4 = c x^2$ da ridurre a

equazione finale. Per divenirvi convien oſſervare, che rieſce più facile di fare ſparire y. Si moltiplichi adunque la prima equazione per y^2, s'avrà $x^2y^2+xy^3+y^4=axy^2$, o ſia $y^4=axy^2-x^2y^2-xy^3$, ſoſtituiſcaſi queſto valore di y^4 nella ſeconda equazione, e s'otterrà $x^4+x^2y^2+axy^2-x^2y^2-xy^3=cx^2$, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà $x^3+ay^2-y^3=cx$. Si moltiplichi di nuovo la prima equazione per y, s'avrà $x^2y+xy^2+y^3=axy$, o ſia $x^2y+xy^2-axy=-y^3$, ſi ſoſtituiſca queſto valore di $-y^3$ nell'ultima ottenuta equazione $x^3+ay^2-y^3=cx$, e s'avrà $x^3+ay^2+xy^2+x^2y-axy=cx$. In queſta nuova equazione in luogo di y^2 ſi ſoſtituiſca il ſuo valore $ax-x^2-xy$ ricavato dalla prima equazione, ſarà $x^3+\overline{a+x}\times\overline{ax-x^2-xy}+x^2y-axy=cx$, o ſia $x^3+ax^2-x^3-x^2y+a^2x-axy-ax^2+x^2y-axy=cx$, e corretta l'eſpreſſione, ſarà $a^2-2ay=c$, onde $y=\frac{a^2-c}{2a}$. Soſtituendo pertanto il valore di y nella prima equazione come più ſemplice, s'avrà $x^2+\frac{a^2x-cx}{2a}+\frac{a^4-2a^2c+c^2}{4a^2}=ax$ equazione finale.

189.

189. Sieno proposte le due equazioni primitive

1.ª $y^2 = a^2 - x^2$

2.da $x^6 + x^4 y^2 + x^2 y^4 + y^6 = a^4 x^2$ da ridursi nella finale. Si prenda la prima equazione, come la più semplice, e volendo sterminare l' incognita y, si moltiplicherà l' equazione per y^2, ed anche per y^4, e s' avranno i seguenti valori $y^2 = a^2 - x^2$, $y^4 = \overline{a^2 - x^2} \times y^2$, $y^6 = \overline{a^2 - x^2} \times y^4$. Si sostituiscano adunque i valori delle potestà di y nella seconda equazione, e s' avrà $x^6 + x^4 \times \overline{a^2 - x^2} + x^2 \times \overline{a^2 - x^2}^2 + \overline{a^2 - x^2}^3 = a^4 x^2$, e fatte le attuali moltipliche, sarà $x^6 - a^2 x^4 + a^4 x^2 + a^6 - 3a^4 x^2 + 3 a^2 x^4 - x^6 = a^4 x^2$, e correggendo l' espressione, e dividendo per a^2, s' avrà $2x^4 + a^4 = 3a^2 x^2$ per l' equazione finale.

190. Collo stesso metodo si dovrà procedere, se le equazioni primitive, e le incognite in esse contenute saranno più di due.

La medesima regola serve pure per fare sparire i radicali da una proposta equazione, o come suol dirsi *per liberare l'equazione dall' Assimetria*, bastando perciò considerare ciascun termine radicale diverso,

come altrettante incognite, ſulle quali ſi faranno le operazioni additate per eſterminarle, e ridurle ad una ſola.

191. Per far vedere l' applicazione di queſta regola ſi adduce il ſeguente eſempio.

Abbiaſi l'equazione $\sqrt{ay} - \sqrt{a^2 - ay} = 2a + \sqrt[3]{ay^2}$, per liberarla dall'aſſimetria, conſiderando ciaſchedun termine radicale diverſo, come un' incognita; ſia $\sqrt{ay} = z$, $\sqrt{a^2 - ay} = u$, $\sqrt[3]{ay^2} = x$, ſoſtituendo queſti valori, avremo le quattro ſeguenti equazioni particolari con quattro incognite z, u, x, y, cioè

1.ª $z - u = 2a + x$

2.da $z^2 = ay$

3.ª $u^2 = a^2 - ay$

4.ª $x^3 = ay^2$, dalle quali facendo ſparire le incognite u, z, y, s'avrà l'equazione libera dai radicali, in cui ſi troverà la ſola incognita x.

Dalla prima equazione ſi ricava $z = 2a + x + u$; onde moltiplicando tutto per z, ſarà $z^2 = 2az + xz + uz$, e ſoſtituendo queſto valore di z^2 nella ſeconda equazione $z^2 = ay$, ſarà $ay = 2az + xz + uz$, e ſcrivendo in queſta in vece di z il ſuo valore $2a + x + u$ ricavato dalla prima equazione, ſarà $ay = 4a^2 + 4ax + x^2 + 4au + 2ux + u^2$.

Essendo le quattro incognite ridotte alle tre u, x, y, converrà operare sulle tre equazioni seguenti.

1.ª $u^2 = a^2 - ay$

2.ᵈᵃ $x^3 = ay^2$

3.ª $ay = 4a^2 + 4ax + x^2 + 4au + 2ux + u^2$. Sostituiscasi nella terza equazione il valore di $u^2 = a^2 - ay$ dedotto dalla prima, e s' avrà $ay = 4a^2 + 4ax + x^2 + 4au + 2ux + a^2 - ay$, e correggendo l' espressione, sarà $2ay = 5a^2 + 4ax + x^2 + 4au + 2ux$, e trovando in questa il valore di u, cioè

$u = \frac{2ay - 5a^2 - 4ax - x^2}{4a + 2x}$ si sostituirà il suo quadrato nell' equazione $u^2 = a^2 - ay$, e s' avrà

$$a^2 - ay = \frac{4a^2y^2 - 20a^3y + 25a^4 - 16a^2yx}{16a^2 + 16ax + 4x^2}$$
$$\frac{-4ayx^2 + 16a^2x^2 + 40a^3x + 8ax^3 + 10a^2x^2 + x^4}{16a^2 + 16ax + 4x^2}$$

e liberando l'equazione dalla frazione, e correggendo l' espressione, sarà $4a^3y - 4a^2y^2 = x^4 + 8ax^3 + 22a^2x^2 + 24a^3x + 9a^4$. Col mezzo di tali operazioni le quattro incognite, e le quattro equazioni si trovano ridotte a due sole, cioè quest' ultima ritrovata, e l' altra $x^3 = ay^2$; e però, se quest' ultima si moltiplicherà per

x, s' avrà $x^4 = a y^2 x$, e sostituendo nell' altra equazione i valori di x^3, e di x^4, s' avrà, correggendo l' espressione, $a y^2 x + 12 a^2 y^2 + 22 a^2 x^2 + 24 a^3 x = 4 a^3 y - 9 a^4$, nella quale scrivendo $\frac{x^3}{a}$ in vece di y^2, e $\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ in vece di y, sarà

$$4 a^3 \sqrt{\frac{x^3}{a}} = x^4 + 12 a x^3 + 22 a^2 x^2 + 24 a^3 x + 9 a^4,$$

e quadrando ambedue i membri, s' avrà l' equazione libera dall' assimetria.

192. Quale sia poi il ripiego da usarsi per ottenere equazioni più semplici, o più depresse, non si può altrimenti determinare, se non se nei casi particolari. Tutto quello, che dire si può in generale, è, che col fare uso delle proprietà delle grandezze s' ottiene spesso equazione più semplice, o più depressa di ciò succeda, quando s' esprimono a dirittura le condizioni del problema in quella maniera, che sembra più ovvia, e naturale. Per la qual cosa, dovendosi risolvere un problema, è necessario, nell' instituire il canone, esaminare, se ciò possa farsi in una maniera più semplice coll' adoperare una, o più delle proprietà delle grandezze,

Oltre i riſcontri, che di queſto avvertimento ſi ſono già dati nel Capo antecedente, cominceremo a darne uno molto concludente nella ſoluzione del ſeguente problema, e ſe ne tratterà poi in una maniera più particolare nel Capo 5.

Trovare due numeri diſuguali, de'quali ſia dato il prodotto $= a$, e la ſomma $= c$ dei loro quadrati.

Si chiami il numero maggiore $= x$, il minore $= z$. Nell' adempiere le due condizioni del problema s' otterranno le due equazioni primitive

1.ª $xz = a$

2.da $x^2 + z^2 = c$

Se per avere l' equazione finale ſi maneggeranno le primitive in quella maniera, che ſembra più naturale, s' otterrà l' equazione finale di quarto grado $z^4 + a^2 = cz^2$ (§. 182.)

Per lo contrario, ſe le due equazioni primitive ſi maneggeranno a norma de' ripieghi dati (§. 183.), s' otterrà la finale aſſai più ſemplice $2x = \sqrt{c+2a} + \sqrt{c-2a}$.

Se poi in vece di diſtendere il canone, come ſovra, ſi farà uſo della proprietà delle grandezze eſpreſſa nel corollario (§. 163.), cioè la maggiore di due grandezze diſuguali equivale la ſemiſomma,

più la ſemidifferenza, e la minor grandezza uguaglia la ſemiſomma meno la ſemidifferenza, in ſimil caſo la ſoluzione del problema riuſcirà più ſemplice. Si chiami la ſomma de' due numeri diſuguali ricercati $= 2x$, e ſia la loro differenza $= 2z$, ſarà il numero maggiore $= x + z$, ed il minore $= x - z$. Adempiſcanſi le due condizioni del problema, e s'avranno le due equazioni primitive.

$$1.^a \; \overline{x+z} \times \overline{x-z} = x^2 - z^2 = a$$

$$2.^{da} \; \overline{x+z}^2 + \overline{x-z}^2 = 2x^2 + 2z^2 = c,$$

le quali maneggiate a tenore del (§. 181.) somminiſtrano l'equazione finale ſempliciſſima $z^2 = \frac{c - 2a}{4}$.

Trovare il valore dell' incognita nelle equazioni finali affette.

193. Per mezzo della dottrina, in cui ſi eſamina la natura delle equazioni, s'arriva a conoſcere originalmente il modo di maneggiarle, affine di avere il valore dell' incognita, qualunque ſia il grado, cui queſta trovaſi elevata. Siccome queſta dottrina forma una parte dell' Analiſi ſublime, così baſterà, che in queſti ele-

menti si tratti delle equazioni affette del secondo grado, e di alcuni casi particolari delle equazioni di grado superiore.

194. Qualsivoglia equazione affetta, che si riduce uguale al zero col far passare tutti i termini in un sol membro dell'equazione, e da quella banda, in cui la massima potestà dell' incognita riesce positiva, si può considerare come la potestà di una quantità composta, la quale potestà può essere perfetta, o imperfetta. Per esempio l' equazione $x^2 + c^2 = 2cx$, essendo ridotta al zero, come $x^2 - 2cx + c^2 = 0$, somministra un quadrato perfetto. Ma l'equazione $y^2 + ay = mn$, essendo ridotta al zero, dà una potestà imperfetta $y^2 + ay - mn = 0$.

Affinchè la potestà di un binomio sia perfetta, aver dee un numero di termini espresso dall' esponente della massima potestà dell' incognita accresciuto dell' unità (§. 38.). Per la qual cosa le equazioni affette ridotte al zero non possono avere più di tre termini, se sono del secondo grado, quattro, se sono del terzo grado, cinque, se sono del quarto grado, e così susseguentemente; dovendosi quì notare, che nelle equazioni si contano per un sol termine tutti quelli, ne' quali l' incognita

è elevata al medesimo grado, e che tutti i termini composti di quantità cognite si contano pure per un solo; e così l'equazione $a x^2 - c x^2 + d^2 x = f^3 - c m^2$ si considera di tre termini, stantechè $ax^2 - cx^2$ contano per un sol termine. Lo stesso dire si dee delle due quantità cognite $f^3 - cm^2$.

195. Oltre il numero de' termini fa di mestiere badare anche alla sequela de' segni, dopo d'aver ordinata l'equazione secondo i gradi dell'incognita: imperciocchè, se la potestà sarà perfetta, tutti i segni saranno positivi, o pure saranno alternamente positivi, e negativi; e si dee pure notare, che, qualunque volta i segni sono alternamente positivi, e negativi, l'ultimo termine, che è sempre la quantità cognita, dee essere positivo, se l'indice della potestà è un numero pari, e dee esso termine essere negativo, se l'indice della potestà sarà un numero dispari; il che tutto si deduce facilmente dalla formazione delle potestà (§. 38.) col supporre in generale un binomio $x \pm c$.

196. L'artifizio per trovare il valore dell'incognita in quelle equazioni affette, di cui trattiamo adesso la risoluzione, consiste nel rendere potestà perfetta un membro dell'equazione, ove questa non si

trovi tale, dopo d' eſſere ridotta uguale al zero.

197. Per applicare le date regole, ſia propoſta l' equazione $x^2 + 9 = 6x$, in cui ſi dee trovare il valore dell' incognita. Si riduca l' equazione uguale zero (§. 194.), e ordinati i termini ſecondo i gradi dell' incognita, s' avrà $x^2 - 6x + 9 = 0$, nella quale ſi oſſerva, che, eſſendo 9 il quadrato di 3 metà del coefficiente 6 di x, ed eſſendo la ſequela de' ſegni alternamente poſitivi e negativi, l' equazione è un quadrato perfetto, la cui radice è $x - 3 = 0$, ed $x = 3$.

Se s'abbia l'equazione $10y = -25 - y^2$, ſi ridurrà la medeſima uguale al zero col fare sì, che la maſſima poteſtà di y ſia poſitiva, e s' avrà $y^2 + 10y + 25 = 0$, che ſi oſſerva eſſere un quadrato perfetto, la cui radice è $y + 5 = 0$, e quindi $y = -5$.

Se l'equazione $y^3 + 108y = 18y^2 + 216$ ſi ridurrà uguale al zero, ordinandola ſecondo i gradi dell' incognita, ſi avrà $y^3 - 18y^2 + 108y - 216 = 0$, che, atteſa anche l' alternativa de' ſegni, ed i valori de' coefficienti, ſi ſcorge eſſere un cubo perfetto, la cui radice è $y - 6 = 0$, e $y = 6$.

Col ridurre l'equazione $z^3 + 343 = -21z^2 - 147z$ uguale al zero, e coll'ordinarla secondo i gradi dell' incognita, si ha $z^3 + 21z^2 + 147z + 343 = 0$, che, atteso il valore de' coefficienti, e la sequela de' segni, è un cubo perfetto, la cui radice è $z + 7 = 0$, e quindi $z = -7$.

Se l' equazione $x^4 + 54x^2 = 12x^3 + 108x - 81$ si ridurrà uguale al zero, e se ne ordineranno i termini secondo i gradi dell' incognita, s' avrà $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81 = 0$, la quale, avuto il debito riguardo all' alternativa de' segni, ed al valore de' coefficienti, si riconosce essere una quarta potestà perfetta, da cui estratta la radice, si ha $x - 3 = 0$, ed $x = 3$.

198. Se, dopo d' aver ridotta l' equazione uguale al zero, si trova, che l' espressione non è potestà perfetta, e che l' imperfezione nasce unicamente dal termine cognito, in simile riscontro si farà passare questo termine nell' altro membro, indi il coefficiente del secondo termine dell' equazione ordinata secondo i gradi dell' incognita si dividerà per l' esponente della massima potestà d' essa incognita, e questo quoziente si eleverà alla stessa massima potestà, e così elevato s' aggiugnerà

in ambe le parti dell' equazione ; ſe tutti i termini, ne' quali trovaſi l' incognita, avranno il ſegno più, o, ſe avranno alternamente il ſegno più e meno, il grado dell' equazione ſarà eſpreſſo da un numero pari ; ma qualora, ſuſſiſtendo l' alternativa de' ſegni, il grado dell' equazione ſarà eſpreſſo da un numero diſpari, il quoziente come ſovra elevato ſi ſottrerrà in ambedue i membri dell'equazione (§. 195.), dopo del che ſi eſtrarrà la radice da ambe le parti.

199. Volendo addurre alcuni eſempi per applicare la regola dell' antecedente paragrafo, ſia propoſta l' equazione finale $x^2 + 60 = 16x$, ſiccome, dopo d'averla ridotta al zero $x^2 - 16x + 60 = 0$, ſi trova, ch' eſſa non è poteſtà perfetta, e che il difetto naſce unicamente dal termine 60, così traſportato eſſo 60 nell' altro membro, e aggiugnendo da ambe le parti 64, che è il quadrato di $\frac{16}{2} = 8$ metà del coefficiente del ſecondo termine $16x$, ſi ha $x^2 - 16x + 64 = 64 - 60 = 4$, ed eſtratta la radice quadrata da ambe le parti, ſi ha $x - 8 = \pm 2$, ed $x = 8 \pm 2$; dovendoſi ſempre prefiggere il ſegno ambiguo $\pm$ alla radice numerica, ſtantechè,

potendosi questa prendere positiva, o negativa, somministra i due valori di $x = 8 + 2 = 10$, ed $x = 8 - 2 = 6$; giacchè ambidue questi valori soddisfano alle condizioni dell' equazione.

Abbiasi l'equazione finale $x^2 - 3x = 10$, siccome, dopo d' averla ridotta uguale al zero, si trova, che non è potestà perfetta, così, lasciando esso 10 nel secondo membro, s' aggiugne in ambe le parti $\frac{9}{4}$, che è il quadrato di $\frac{3}{2}$ metà del coefficiente del secondo termine $3x$, e si ha $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 10 + \frac{9}{4} = \frac{49}{4}$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, si ha $x - \frac{3}{2} = \pm \frac{7}{2}$, ed $x = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$, cioè $x = 5$, ed $x = -2$.

L' equazione $y^2 + 7y + 12 = 0$ si vede essere potestà imperfetta per causa del numero 12, e quindi trasportando questo termine nel secondo membro, ed aggiugnendo da ambe le parti $\frac{49}{4}$, che è il quadrato di $\frac{7}{2}$, si ha $y^2 + 7y + \frac{49}{4} = -12 + \frac{49}{4} = \frac{1}{4}$, ed estratta la radice quadrata,

si ha $y + \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2}$, e $y = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$, cioè $y = -3$, e $y = -4$.

200. Prima d'inoltrarsi maggiormente in quest' applicazione convien osservare la seguente equazione generica del secondo grado $x^2 \pm 2ax + a^2 = a^2 \pm c^2$, affine di avere un' idea distinta di tutte le mutazioni, che in essa occorrer possono, e delle conseguenze, che ne derivano. In quest' esame si vede facilmente, che la quantità a^2, la quale trovasi da ambe le parti dell' equazione, è il quadrato della metà del coefficiente del termine $2ax$, per mezzo della quale si riduce il primo membro in potestà perfetta, e si vede pure, che la quantità cognita $= a$, la quale s' ottiene nell' estrarre la radice quadrata dal primo membro, aver dee lo stesso segno, che ha esso secondo termine. Rispetto poi alla quantità cognita c^2, che trovasi nel secondo membro dell' equazione, se essa sarà positiva, o che, essendo negativa, sarà minore del quadrato a^2 della metà del coefficiente, si dirà, che in questo caso i valori dell' incognita saranno sempre reali, ma se essa quantità, essendo negativa, sarà maggiore del divisato quadrato, allora i valori dell' incognita sa-

ranno immaginarj, e quindi ſaremo certi, che l' equazione involve qualche aſſurdo.

201. Per applicare la regola del §. 198. alle equazioni di grado ſuperiore al ſecondo: abbiaſi l'equazione finale $12z^2 + 48z = 665 - z^3$. Dopo d'averla reſa uguale al zero colla maſſima poteſtà dell' incognita poſitiva, e dopo d'averla ordinata ſecondo i gradi di queſta, ſi vede, che l'eſpreſſione è poteſtà imperfetta unicamente per cauſa del numero 665, il quale ſi dee laſciare nell' altro membro per avere $z^3 + 12z^2 + 48z = 665$, e aggiugnendo in ambe le parti 64, che è il cubo di $\frac{12}{3}$ terza parte del coefficiente del ſecondo termine $12z^2$, ſi ha $z^3 + 12z^2 + 48z + 64 = 665 + 64 = 729.$, ed eſtratta da ambe le parti la radice cubica, ſi ha $z + 4 = 9$, e $z = -4 + 9 = 5$.

Abbiaſi l' equazione $y^3 + 108y = 559 + 18y^2$, dopo d'averla diſpoſta ſecondo i gradi dell' incognita, ſi trova, che è poteſtà imperfetta unicamente per cauſa del termine cognito (§. 38.), onde, laſciando queſto nell' altro membro, ſi leverà da ambe le parti per cauſa dell' alternativa de' ſegni, e dell' eſponente diſpari, ſi leverà, dico, il numero 216,

che è il cubo di $\frac{18}{3}$, e s'avrà $y^3 - 18y^2 + 108y - 216 = 559 - 216 = 343$, ed eſtratta la radice cubica, ſi avrà $y - 6 = 7$, e $y = 6 + 7 = 13$.

Finalmente abbiaſi l'equazione $x^5 + 90x^3 + 405x = 1267 + 15x^4 + 270x^2$, dopo d'averla ordinata ſecondo i gradi dell'incognita $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 1267 = 0$, ſi trova che, ſe ſi farà paſſare 1267 nell'altro membro, e che per cauſa dell'alternativa de' ſegni in queſt' equazione di grado diſpari ſi leverà da ambe le parti 243, che è la quinta poteſtà di $\frac{15}{5} = 3$, s'avrà una quinta poteſtà perfetta nel primo membro (§. 38.); onde ſarà $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 450x - 243 = 1267 - 243 = 1024$, ed eſtratta da ambe le parti la radice quinta, ſi ha $x - 3 = 4$, ed $x = 3 + 4 = 7$.

Nella ſteſſa maniera ſi procederà per le equazioni di grado ſuperiore.

202. Occorrendo poi, che nelle equazioni di grado ſuperiore al ſecondo ridotte al zero ſi trovi, che l'eſpreſſione è poteſtà imperfetta per cauſa di qualche coefficiente dell'incognita, come $y^3 - 20y^2$

$+7y-150=0$, o pure perchè manca qualche termine, come $z^4+5z^2-30z+150=0$, o finalmente perchè i segni non sono con quella sequela, che si dee (§. 195.), converrà in simili riscontri usare le regole, che si danno nell'Analisi sublime, eccettuattone però il caso seguente, ed è, quando l'equazione affetta ha tre soli termini, e che l'indice massimo dell'incognita, essendo espresso da un numero pari, l'esponente dell'incognita, che si trova nell'altro termine, è la metà del detto esponente massimo. Queste tali equazioni si chiamano derivative del grado indicato dalla metà dell' esponente massimo, e si trattano da principio come se fossero di secondo grado, e dopo d'aver per tal mezzo trovato il valore dell'incognita elevata al grado indicato dalla metà dell'esponente massimo, si lascia l'incognita sola da una parte, e si ha una equazione pura da risolversi a norma delle cose già insegnate nel Capo antecedente.

203. Per far pratica di questa regola (§. 202.), sia data l'equazione finale del quarto grado $x^4-20x^2=576$; si consideri la medesima come un'equazione di secondo grado, e però, presa la metà 10

del

del coefficiente di $20x^2$, si quadri, e s'aggiunga da ambe le parti, e s'avrà $x^4 - 20x^2 + 100 = 576 + 100 = 676$, ed estratta la radice quadrata, sarà $x^2 - 10 = \pm 26$, ed $x^2 = 10 \pm 26$, equazione pura di secondo grado, in cui, pigliando il valore positivo, si ha $x^2 = 36$, e quindi $x = \pm 6$; se poi si prenderà il valore negativo, sarà $x^2 = -16$, il che fa vedere, che gli altri due valori di quest' incognita sono immaginarj.

Abbiasi l'equazione finale dell'ottavo grado $y^8 - 10y^4 = 5751$; considerata questa equazione come se fosse del secondo grado, si aggiunga da ambe le parti 25, che è il quadrato di 5 metà del coefficiente di $10y^4$, e s'avrà $y^8 - 10y^4 + 25 = 5751 + 25 = 5776$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, si ha $y^4 - 5 = \pm 76$, e $y^4 = 5 \pm 76$, equazione pura di quarto grado, in cui, preso il valore positivo, si ha $y^4 = 81$, ed estratta la radice quarta, si ha $y = \pm 3$, essendo poi immaginarie le radici dell' equazione $y^4 = -71$.

Sia data l'equazione finale del sesto grado $z^6 + 80z^3 = 303104$. Si consideri pure come se fosse di secondo grado, onde, aggiugnendo da ambe le parti 1600

quadrato di 40, che è la metà di 80 coefficiente del termine $80z^3$, si ha $z^6 + 80z^3 + 1600 = 303104 + 1600 = 304704$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, si ha $z^3 + 40 = \pm 552$, e quindi $z^3 = -40 \pm 552$, equazione pura, in cui, se si prende il valore positivo, si ha $z^3 = 512$, ed estratta la radice cubica, si ha $z = 8$. Se poi si prenderà il valore negativo, sarà $z^3 = -592$, e quindi $z = \sqrt[3]{-592}$, che è un valore pure reale (§. 18.), ma sordo, e negativo.

Abbiasi l'equazione finale del decimo grado $x^{10} - 36x^5 = 1011712$. Considerandola come se fosse del secondo grado, si aggiugnerà da ambe le parti 324, che è il quadrato di 18 metà del coefficiente 36, e s'avrà $x^{10} - 36x^5 + 324 = 1011712 + 324 = 1012036$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, si ha $x^5 - 18 = \pm 1006$, ed $x^5 = 18 \pm 1006$, equazione pura, in cui, pigliando il valore positivo, si ha $x^5 = 1024$, ed estratta la radice quinta, si ha $x = 4$. Se poi si prenderà il valore negativo, s'avrà $x^5 = -988$, ed estratta la radice quinta, sarà $x = \sqrt[5]{-988}$, valore pure reale, ma negativo, ed incommensurabile.

204. Se nell'estrarre la radice quadrata da una equazione del quarto grado derivativa dal secondo si verrà a formare un radicale, allora nel trattare successivamente l'equazione pura, s'avranno due radicali del secondo grado accavallati. Se s'abbia l'equazione finale $y^4 - 304y^2 = -18496$, coll'aggiugnere il quadrato della metà del coefficiente da ambe le parti s'avrà $y^4 - 304y^2 + 23104 = -18496 + 23104 = 4608$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, sarà $y^2 - 152 = \pm\sqrt{4608}$, stantechè questo ultimo numero non è quadrato perfetto, e quindi l'equazione pura sarà $y^2 = 152 \pm \sqrt{4608}$, ed estratta di nuovo la radice quadrata, sarà $y = \pm\sqrt{152 \pm \sqrt{4608}}$.

Se in vece di questi radicali accavallati si vorrà una espressione più semplice pel valore di y, converrà usare la seguente regola coll'estrarre effettivamente la radice quadrata dal binomio $152 \pm \sqrt{4608}$.

205. Per capire facilmente il fondamento della regola, per cui si estrae la radice quadrata da un binomio, convien rammentarsi che, qualora si moltiplica in se stesso un binomio radicale, come $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$, si produce un altro binomio $m + n \pm 2\sqrt{mn}$,

in cui un termine riesce razionale, e contiene la somma dei quadrati di $\sqrt{m}$, e di $\sqrt{n}$, e l'altro termine continua ad essere irrazionale, ed esprime il doppio prodotto di $\sqrt{m}$ in $\sqrt{n}$. La medesima cosa dire si dee, se il binomio radicale, che si vuole elevare al quadrato, avrà un termine razionale, come $m \pm \sqrt{n}$. Ciò premesso

Suppongasi, che $m + n$ rappresenti generalmente un binomio quadrato qualunque, in cui m esprime il termine razionale, ed n addita il termine radicale. Suppongasi in oltre, che $x + z$ sia la radice quadrata d'esso binomio, s'avrà $x^2 + z^2 + 2xz = m + n$, e quindi $x^2 + z^2 = m$ saranno le quantità razionali, e $2xz = n$ saranno le quantità irrazionali. In quest'ultima equazione si trovi il valore di $x = \frac{n}{2z}$, e si sostituisca nella seconda equazione $x^2 + z^2 = m$, s'avrà $\frac{n^2}{4z^2} + z^2 = m$, e liberando l'equazione dalla frazione, e ordinandone i termini per rispetto all'incognita z, sarà $z^4 - mz^2 = -\frac{n^2}{4}$, equazione del quarto grado derivativa dal secondo, la quale trattata a norma de' (§. 169, 170.) som-

ministra $z^2 = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{4}} = \frac{m}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}$ e quindi $z = \pm \sqrt{\frac{m}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$. Dalla seconda equazione $x^2 + z^2 = m$ si ricava $x = \pm \sqrt{m - z^2}$; sicchè sostituendo in questa equazione il valore di z^2, s' avrà

$x = \pm \sqrt{m - \frac{m}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$

$= \pm \sqrt{\frac{m}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$. Si scorge adunque, che il termine maggiore della radice sarà espresso per $\sqrt{\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$, ed il termine minore sarà $\sqrt{\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$; dovendosi quì osservare, che questi termini della radice avranno il medesimo segno, se quelli del binomio quadrato avranno lo stesso segno, ed avranno segni diversi, se tali saranno i segni del binomio quadrato.

Dalla considerazione di queste due formole 1.ª $\sqrt{\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$, 2.da $\sqrt{\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}}$ si deduce

1.° Che se nel binomio proposto, da cui si dee estrarre la radice, il termine

razionale $=m$ non sarà maggiore dell'irrazionale $=n$, la quantità $\sqrt{m^2-n^2}$ sarà negativa, e quindi immaginarie le radici del binomio proposto.

2.do Che la differenza m^2-n^2 dee essere un quadrato perfetto, senza del che la radice del binomio proposto non si può esprimere con radicali semplici, ma convien accavallarli per necessità.

206. Per far vedere l'uso delle formole dell' antecedente paragrafo si ripigli l'equazione (§. 204.) $y^2=152+\sqrt{4608}$, e considerando $m=152$, $n=\sqrt{4608}$, sostituiscansi questi numeri nelle formole suddette, e s' avrà

1.a $\sqrt{\frac{152}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{23104-4608}}=12$

2.da $\sqrt{\frac{152}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{23104-4608}}=\sqrt{8}$, e quindi s'avrà $y=12+\sqrt{8}$, in cui il termine 12 è razionale.

Se s'abbia l'equazione $z^2=10+\sqrt{84}$, da cui si dee estrarre la radice quadrata, col sostituire nelle formole 10 in vece di m, e $\sqrt{84}$ in vece di n, s' avrà $z=\sqrt{7}+\sqrt{3}$ per la radice ricercata, la quale ha ambedue i termini irrazionali.

207. Allorchè nel trattare le equazioni del sesto grado derivative del terzo si

trova, che l' incognita, dopo d' essere depressa al terzo grado, è uguale a un binomio radicale, come $x^3 = 124 \pm \sqrt{14045}$, in simil caso fa di mestiere accavallare i radicali per avere il valore lineare dell'incognita, e così, estraendo la radice cubica da questa equazione, s' avrà

$$x = \sqrt[3]{124 \pm \sqrt{14045}}.$$

Ove poi si voglia esprimere questa radice cubica col semplice radicale quadrato, cioè $x = 4 + \sqrt{5}$, fa d' uopo, per trovarlo, raccorrere ad altre regole, delle quali si tratta nell' Analisi sublime.

Si risolvono problemi di grado superiore al primo.

208. Nella Cittadella si dee alloggiare una brigata di Fanteria composta di 1530 soldati. Le camere per quest' alloggio sono tutte d' ugual capacità, e il numero di queste supera di 11 quello de' soldati, che si può alloggiare in ciascheduna camera. Cercasi quale sia il numero delle camere, e quello de' soldati da destinarsi in ciascuna di esse.

Dall' esposto del problema si scorge facilmente che, se verrà cognito il numero

de' ſoldati, che occuperanno una camera, ſi farà con ciò noto il numero di queſte, e però chiamando x il numero de' ſoldati da deſtinarſi in una camera, ſarà $x+11$ il numero delle camere, che ſi hanno per l'alloggio, e moltiplicando queſti due numeri fra di loro, s'avrà un prodotto uguale ai 1530 ſoldati da alloggiarſi, il che ſomminiſtra la ſeguente equazione finale $x \times \overline{x+11} = 1530$, o ſia $x^2 + 11x = 1530$, in cui, aggiugnendo il quadrato di $\frac{11}{2}$, ſi ha $x^2 + 11x + \frac{121}{4} = 1530 + \frac{121}{4} = \frac{6241}{4}$, ed eſtratta da ambe le parti la radice quadrata, ſi ha $x + \frac{11}{2} = \pm \frac{79}{2}$, ed $x = -\frac{11}{2}$ $\pm \frac{79}{2}$, e pigliando il valore di x poſitivo, ſi ha $x = 34$, e quindi il numero delle camere ſarà $34 + 11 = 45$.

Se dopo d'aver ſuppoſto $= x$ il numero de' ſoldati da deſtinarſi in una camera ſi dividerà 1530 per x, il quoziente darà il numero delle camere $= x + 11$, e quindi s'avrà queſt'altra equazione $\frac{1530}{x} = x + 11$, in cui, facendo ſparire la frazione, s'ottiene l'equazione primiera $1530 = x^2 + 11x$.

209. Tre Pellegrini compagni hanno ricevuto ll. 26 d' elemosina in modo, che quella del secondo supera di ll. 6 il quadrato del numero ricevuto dal primo, ed il terzo ne ha conseguite tanto come gli altri due insieme meno ll. 10. Cercasi quanto abbia ricevuto ciascuno d' essi.

Dall' esposto del problema si vede facilmente che, se si conosceranno i denari del primo, si faranno in conseguenza noti quelli degli altri due compagni. Pertanto si chiami il primo $= x$, sarà il secondo $= x^2 + 6$, il terzo $= x^2 + x + 6 - 10$ $= x^2 + x - 4$. Col sommare queste tre quantità s' avrà l' equazione $x + x^2 + 6 + x^2 + x - 4 = 26$, e correggendo l'espressione, e ordinandola per l' incognita, sarà $2x^2 + 2x = 24$, e dividendo per 2, sarà $x^2 + x = 12$, ed aggiugnendo da ambe le parti il quadrato di $\frac{1}{2}$, sarà $x^2 + x + \frac{1}{4} = 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4}$, e quindi $x + \frac{1}{2} = \pm \frac{7}{2}$, ed $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$.

210. Due Socj, avendo intrapreso un negozio, hanno formato un capitale di ll. 2160, col quale hanno guadagnato ll. 6120. Nel fare il ripartimento sono

toccate al primo ll. 1260 pel guadagno di due anni, e pel ſuo capitale, ed il ſecondo ha avuto ll. 7020 pel guadagno d' anni cinque, e pel ſuo capitale. Cercaſi quale ſia il capitale, ed il guadagno d'ognuno d' eſſi.

Dall' eſpoſto del problema non ſi ſcorge così preſto la via per ridurlo a equazione. E' neceſſario pertanto di riflettere, che, ſe ſi conoſcerà il capitale del primo, ſi farà con ciò noto quello del ſecondo, e che, levando il capitale del primo dalle ll. 1260, che queſto ha ricevuto, s'ottiene il ſuo guadagno, e quindi anche il guadagno dell'altro ſocio; ma perchè queſte rifleſſioni non baſtano ancora per ridurre il problema a equazione, converrà ancora conſiderare, che il guadagno di ciaſchedun ſocio dee eſſere proporzionale al capitale, ed al tempo, che è rimaſto nella ſocietà, col qual mezzo, ſe ſi inſtituirà una proporzione, e valendoſi indi della proprietà delle proporzioni, cioè che il prodotto degli eſtremi è uguale al prodotto dei termini di mezzo (§. 122), s' avrà l' equazione primitiva, e finale.

Sia pertanto il capitale del primo $=x$, ſarà quello del ſecondo $=2160-x$, e ſarà il guadagno del primo $=1260-x$,

e quello del secondo sarà $6120 - 1260 + x = 4860 + x$.

Instituiscasi ora la proporzione, dicendo, se x capitale del primo in anni 2 ha fruttato $1260 - x$, il capitale $2160 - x$ in anni 5 avrà fruttato $4860 + x$, cioè $2 \times x : 1260 - x :: 5 \times \overline{2160 - x} : 4860 + x$, e facendo il prodotto dei medj, e degli estremi, si ha l'equazione $2 \times x \times \overline{4860 + x} = \overline{1260 - x} \times 5 \times \overline{2160 - x}$, e facendo le attuali moltipliche, e maneggiando indi l'equazione secondo le date regole, si trova $x = 540$, col qual mezzo si hanno poi le altre cose ricercate.

211. Un testatore lascia un capitale di ll. 27000 con obbligo di distribuire annualmente colla rendita un'elemosina uguale a 360 poveri nel giorno anniversario del suo decesso. Questa rendita è tale, che, se si divide il capitale pel quadrato dell' elemosina da darsi a uno de' poveri, ed a questo quoziente s' aggiungono ll. 240, si ha lo stesso numero, che s'ottiene col dividere il quadrato della rendita pel numero de' poveri. Cercasi quale sia la rendita, e l' elemosina da darsi a ciascun povero.

Se la rendita sia $= y$, e l' elemosina $= x$, sarà 1.ª equazione $y = 360\, x$, 2.ª equa-

zione $\frac{27000}{x^2} + 240 = \frac{y^2}{360}$. Se in questa seconda equazione in vece di y^2 si sostituirà il suo valore ricavato dalla prima, e si correggerà l' espressione, s' avrà $\frac{27000}{x^2} + 240 = 360\,x^2$, e facendo sparire la frazione, s'avrà $27000 + 240\,x^2 = 360x^4$, equazione del quarto grado derivativa del secondo, che maneggiata secondo le date regole somministra $x=3$, e quindi $y=1080$.

212. Un Orefice ha posto entro un crogiuolo parecchie once d' oro per gettare un certo lavoro. Mentre il metallo era già squagliato uno de' garzoni ne ha cavato fuori sei once, e vi ha suppeditato altrettanto argento, di là a qualche tempo un altro garzone ha cavato dal crogiuolo sei once del mescuglio, e vi ha suppeditato altrettanto argento. Un terzo garzone ha pure levato altre sei once di mescuglio, che ha rimpiazzato con altrettanto argento. L' orefice, dopo d' aver gettato il lavoro, s' accorge della frode, e, fattone il saggio, trova che l' oro nel lavoro è solamente $\frac{729}{1000}$ della quantità, che posto avea nel crogiuolo. Cercasi quale sia la quantità dell' oro posta da principio.

Per ridurre questo problema a equazione convien riflettere, che non ostante le entre estrazioni la quantità della materia entro il crogiuolo è sempre la stessa per causa dell' argento, che vi si suppedita, e perchè questi metalli, essendo liquefatti, non consumano, e quindi che la quantità dell' oro, che incontrasi nel mescuglio della seconda e terza estrazione, dee essere proporzionale a quella, che esiste entro il crogiuolo, quando si fa la cavata. Ciò posto.

Sia $= x$ la quantità dell'oro posta da principio entro il crogiuolo, sarà $x - 6$ essa quantità dopo la prima estrazione, e, giacchè dopo d' aver suppeditato altrettanto argento si cavano sei once di misto, così per avere la quantità dell' oro contenuto in questa cavata, si farà la seguente proporzione.

Come la quantità x della materia contenuta nel crogiuolo stà a 6 once di misto cavato, così la quantità $x - 6$ d'oro, che trovasi nel crogiuolo, stà al quarto termine, cioè

$x : 6 :: x - 6 : \frac{6x-36}{x}$, che è la quantità dell' oro, che si piglia nella seconda estrazione, e questa sottratta da $x - 6$, si ha

nell'avanzo $x - 6 - \frac{6x+36}{x} = \frac{x^2-12x+36}{x}$ l'oro, che trovaſi ancora entro il crogiuolo; nella ſteſſa maniera s'avrà la quantità dell'oro, che trovaſi nella terza eſtrazione collo inſtituire la ſeguente proporzione.

$x : 6 :: \frac{x^2-12x+36}{x} : \frac{6x^2-72x+216}{x^2}$, e queſta quantità ſottratta da quella, che trovavaſi ancora entro il crogiuolo, s'avrà $\frac{x^2-12x+36}{x} - \frac{6x^2+72x-216}{x^2} = \frac{x^3-18x^2+108x-216}{x^2}$ quantità dell'oro, che trovaſi ancora entro il crogiuolo, la quale è uguale a $\frac{729}{1000}$ della quantità del miſto eſpreſſa per x.

S'avrà adunque $\frac{x^3-18x^2+108x-216}{x^2} = \frac{279x}{1000}$, e facendo ſcomparire il rotto, ſarà

$x^3 - 18x^2 + 108x - 216 = \frac{729x^3}{1000}$.

Coll' eſaminare queſt' equazione, s'oſſerva, che ciaſchedun membro è un cubo perfetto, e però ſe ne eſtrarrà la radice prima di cercare il valore dell' incognita, e s'avrà $x - 6 = \frac{9x}{10}$, e quindi $x = 60$.

213. Nel risolvere un problema si sono ottenute le due seguenti equazioni primitive, delle di cui incognite se ne addimanda il valore.

$$1.^a \quad y^4x^4 - 10yx^2 + y^3 = \frac{256000}{y^3} + 24.$$

$$2.^a \quad y^7x^4 - 10y^4x^2 + 2y^6 = 505856 + 48y^3.$$

Se nel trattare queste equazioni si userà qualcheduno de' ripieghi dati per esterminare le incognite, s' arriverà facilmente alla soluzione del problema. Nel caso nostro si moltiplichi la prima equazione per y^3, e s' avrà

$$1.^a \quad y^7x^4 - 10y^4x^2 + y^6 = 256000 + 24y^3,$$

la quale sottratta dalla seconda dà $y^6 = 249856 + 24y^3$, e questa, essendo maneggiata come una equazione di secondo grado, somministra $y^3 = 12 \pm 500$, e preso il valore positivo di y^3, ed estratta la radice cubica, si ha $y = 8$.

Sostituiscasi questo valore di y nella prima equazione, e s' avrà

$$4096x^4 - 80x^2 + 512 = \frac{256000}{512} + 24,$$

la quale maneggiata nel modo solito dà $x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{793}}{512}}$, nella quale espressione si osservano due valori reali, ed immaginarj gli altri due.

CAPO IV.

Usare il metodo Analitico nella soluzione de' Problemi Geometrici.

214. Le regole, che in questa seconda parte sono già state date per risolvere i problemi numerici col metodo analitico, sono senz' altro indispensabili anche nella soluzione de'Geometrici. A queste regole se ne debbono aggiugnere alcune altre particolari risguardanti l' uso, che si dee fare delle diverse posizioni, e delle relazioni delle linee; avvegnachè il più delle volte queste notizie sono indispensabili per instituire le equazioni primitive, e per distendere il canone coi dovuti riguardi.

Allorchè le posizioni delle linee, e le relazioni delle grandezze, qualunque esse sieno, sono date in modo, che per esprimere le condizioni del problema colle equazioni non si esigono altre linee se non se quelle, che servono per esprimere la figura del problema, allora ne riesce facile la soluzione; ma, se la figura del problema non somministra tutte le linee, e gli angoli necessarj per risolverla, in simil caso fa di mestiere tirare nella figura altre linee, formare angoli, e superficie, e ideare

ideare nuove combinazioni per procurarsi altri dati atti a condurci alla soluzione. Dall' ottima scelta di questi nuovi dati, che l' Analista si procaccia col suo raziocinio, dipende poi la facilità di avere le equazioni primitive, per mezzo delle quali s' arriva alla finale.

Sebbene le regole, di cui ora si ragiona, non conducano immediatamente a trovare quel ripiego specifico, che esigesi nella soluzione di ciaschedun problema, gl' indirizzi, che quì si daranno, riusciranno però molto utili ai principianti, avvegnachè coll' esercizio ne diverrà facilissimo l' uso.

Indirizzi per instituire il canone, e le equazioni primitive.

215. Per trovare le equazioni primitive di un problema geometrico, e distenderne il canone con discernimento si praticheranno le seguenti regole.

1.ª Si comincerà a fare la figura appartenente al problema, nella quale si rappresenteranno i dati in una maniera chiara, distinta, e ben ordinata, e vi si delineeranno pure, o vi si noteranno le cose ricercate, affine di scorgere facilmente

quali ſono le linee, gli angoli, e le ſuperficie, che neceſſariamente entrano nella ſoluzione del problema.

2.da Della deſcritta figura ſi eſamineranno tutte le parti, affine d'individuarne le affezioni, e le proprietà, e fra queſte ſcegliere quelle, che conducono alla ſoluzione immediata della queſtione, o che ne ſomminiſtrano l'avviamento.

3.a In queſt'eſame ſi procurerà di ſcoprire quelle relazioni, e proprietà delle grandezze, per mezzo delle quali s'arriva a inſtituire le equazioni primitive. Queſte ſcoperte ſi regiſtreranno, affine di ſoſtituirvi poi i valori analitici, dopo che ſi ſarà diſteſo il canone.

4.a Se nel fare queſt' eſame non ſi ſcorgerà la ſtrada immediata per inſtituire le equazioni primitive, converrà conſiderare, ſe dalle coſe date ſe ne poſſono dedurre delle altre conducenti al deſiato termine col tirare nella figura nuove linee, le cui affezioni, relazioni, e proprietà ſi oſſerveranno pure attentamente, affine di ſcoprire con queſto procedimento alcuni dati relativi all' eſpoſto nel problema, o pure ſi eſamineranno per una ſtrada diverſa le convenienze delle grandezze, che già incontranſi nella figura, per trovare una,

o più equazioni, le quali conducano poi a ſcoprire quelle altre, che ſi deſiderano, o finalmente converrà dividere in due il problema propoſto, di maniera però, che la ſoluzione del primo ſerva d'avviamento per riſolvere il ſecondo.

5.ª Terminato il diviſato eſame, e regiſtrate le proprietà idonee a ſomminiſtrare le equazioni primitive, ſi diſtenderà il canone colla maggior chiarezza, e ſemplicità poſſibile, avvertendo ſopra tutto di ſchivare le incognite ſuperflue, e procurando di denominare le grandezze in modo, che le equazioni rieſcano compoſte meno che ſi può.

216. I teoremi principali regiſtrati ne' ſei primi Libri d'Euclide, ed alcuni altri dimoſtrati nella Trigonometria ſomminiſtrano i fondamenti per inſtituire le equazioni primitive nei problemi lineari, e nei piani. Per eſempio, ognorachè ſi tratterà d'angoli, e di parallele, converrà aver preſente le propoſizioni 5, 15, 29, e 32 del Libro 1.° d'Euclide.

Se nella figura del problema s'incontrerà il triangolo rettangolo, s'avranno preſenti le ſue proprietà dimoſtrate nella 47 del primo, e nelle 8, 13, e 31 del ſeſto.

Le proposizioni 1, 2, 3, 4, 5, 6, 16, e 17 del Sesto servono per varie altre proprietà de' triangoli, qualunque essi sieno, e trattandosi in questi di trovare il valore de' lati colla notizia degli angoli, si farà uso de' teoremi trigonometrici.

In que' problemi, la cui soluzione dipende dalle proprietà del cerchio, si farà uso delle proposizioni 17, 20, 21, 22, 31, 32, 33, e 35 del terzo, e della 33 del sesto.

Qualora si tratterà di grandezze proporzionali, s' avranno presenti le loro proprietà, e le diverse maniere di argomentare dimostrate nel Libro quinto d' Euclide, e nel capo 5.° della prima parte.

Occorrendo, che i teoremi confacenti alle condizioni del problema non somministrino a dirittura l' equazione, che si ricerca, converrà esaminare, se si possono usare due proprietà diverse per additare la medesima quantità con due differenti espressioni, e con queste s' instituirà poi l' equazione ricercata.

217. Nel distendere il canone si useranno li seguenti indirizzi, affine di schivare le incognite superflue, e le espressioni troppo composte.

1.° Se sarà data di posizione, e di lunghezza una retta KL, ed un punto G fuori di essa, s' intenderà sempre cognita la perpendicolare GF, e le rette GK, GL. FIGURA I. Lo stesso dire si dee di un qualsivoglia triangolo GKL, di cui siano date tre cose, compresovi almeno un lato.

2.do Essendo date due, o più rette parallele, sarà pure nota la distanza, che regna fra esse; e se una, o più rette saranno date di posizione, vi si potrà sempre tirare con un dato intervallo un'altra parallela, o pure si potrà colla data retta di posizione fare un angolo addimandato.

3.° Le linee si esprimeranno con una sola lettera, come a, c, x, o pure colla somma, o colla differenza di due lettere, come $a \pm y$. Occorrendo poi, che di tre rette continuamente proporzionali la prima sia $= p$, e la seconda $= x$, la terza si potrà esprimere per $\frac{x^2}{p}$, affine di sminuire il numero delle incognite. Allo stesso fine se continuando la prima ad essere $= p$, e la terza sarà $= x$, allora quella di mezzo si potrà esprimere per $\sqrt{px}$. Nella stessa maniera se di quattro grandezze proporzionali la prima sia $= p$,

la ſeconda $= c$, e la terza $= x$, la quarta ſi potrà additare per $\frac{cx}{p}$.

4.° Nel triangolo rettangolo ſe un catetto ſia $= c$, e l'altro $= x$, l'ipotenuſa ſi potrà eſprimere per $\sqrt{c^2+x^2}$, e ſe x rappreſenterà l'ipotenuſa, e c un catetto, l'altro catetto ſi potrà eſprimere per $\sqrt{x^2-c^2}$.

5.° Le ſuperficie ſi additeranno col prodotto di due lettere ax, cf, o pure col quadrato di una ſola lettera, come a^2, y^2. Se alle due ſuperficie cd, mx ſi vorrà aſſegnare una terza proporzionale, queſta ſi potrà eſprimere per $\frac{m^2x^2}{cd}$; e ſe cd addita la prima, ed mx la terza, quella di mezzo ſi eſprimerà per $\sqrt{cdmx}$. Se ſi avranno tre ſuperficie proporzionali ad, cf, my, la quarta proporzionale ſi potrà eſprimere in queſta maniera $\frac{cfmy}{ad}$. Se alla ſuperficie az ſe ne vorrà un'altra nella proporzione di $m:n$, queſt'altra ſuperficie ſi eſprimerà per $\frac{anz}{m}$.

6.° Volendo inſtituire una equazione per mezzo del triangolo KGL rettangolo in G, ſi potrà ciò fare in due maniere,

cioè $\overline{KL}^2 = \overline{GK}^2 + \overline{GL}^2$, e sarà l'altra maniera $\overline{GK}^2 - \overline{FK}^2 = \overline{GL}^2 - \overline{FL}^2$, giacchè ciascheduno di questi membri è uguale al quadrato della perpendicolare GF.

7.° Se nel semicérchio FHG, in cui sia il diametro $FG = 2c$, e la parte $FL = x$, si vorrà esprimere la perpendicolare LH, si scriverà $\sqrt{2cx - x^2}$; ma, se il valore di x si conterà dal centro K sino in L, allora, essendo $LG = c + x$, ed $FL = c - x$, sarà $LH = \sqrt{c^2 - x^2}$. Questa espressione corrisponde a quella del triangolo HLK rettangolo in L, in cui, essendo il raggio $KH = c$, e la parte $KL = x$, si ha $LH = \sqrt{c^2 - x^2}$, come al numero 5. FIGURA II.

8.° Ognorachè di due grandezze se ne avrà la somma, e la differenza, se queste si scriveranno in canone a tenore del (§. 163), le equazioni riusciranno per l'ordinario assai più semplici.

Risolvere i problemi Geometrici.

218. Data la superficie $= a^2$ del triangolo FGH rettangolo in G, e cognita la somma dei tre lati trovare l'ipoteuusa FH. FIGURA III.

Considerando l' esposto del problema si comprende facilmente, che per risolvere la questione non è necessario di fare veruna aggiunta alla figura del problema, e che due sono i principj, per mezzo de' quali si possono instituire le equazioni primitive, cioè i due fattori, che somministrano la data superficie, e la proprietà del triangolo rettangolo espressa nella proposizione 47 del Libro 1.° d'Euclide.

Si scrivano pertanto questi due principj (§. 215 n. 3), e si avrà

1.° $\frac{FG \times GH}{2} = a^2$

2.° $\overline{FG}^2 + \overline{GH}^2 = \overline{FH}^2$

L' esame di questi principj fa conoscere, che, se si farà nota la somma delle rette FG, GH, sarà con ciò anche cognito il valore di FH.

Distendasi ora il canone, e sia la superficie data del triangolo $= a^2$

La somma de' tre lati $= c$

Le incognite $FG = x$

$GH = y$

sarà $FH = c - x - y$.

Sostituiscansi i valori analitici nel primo principio, e s'avrà l' equazione primitiva $\frac{xy}{2} = a^2$. Sostituiscansi pure i valori anali-

tici nel secondo principio, e s'avrà la seconda equazione primitiva $x^2 + y^2 = c^2 - 2cx + x^2 - 2cy + 2xy + y^2$; e corretta l'espressione, sarà 2.da $2cx + 2cy = 2xy + c^2$.

Per ridurre a equazione finale le due primitive, basta moltiplicare per 4 la prima equazione $\frac{xy}{2} = a^2$, e sostituire il valore $4a^2$ di $2xy$ nella seconda equazione, e si ha $2cx + 2cy = 4a^2 + c^2$, e dividendo per $2c$, si trova l'equazione finale $x + y = \frac{4a^2 + c^2}{2c}$. Se questo valore di $x + y$ si scriverà nell'espressione del canone $FH = c - x - y$, s'avrà $FH = c - \frac{4a^2 - c^2}{2c} = \frac{c^2 - 4a^2}{2c}$ pel valore ricercato dell'ipotenusa.

Si tralascia di cercare i valori particolari di x, e y, giacchè non sono addimandati nel problema.

219. Nel dato triangolo *FGH* ottusangolo, o acutangolo inscrivere un quadrato *KLMN* di maniera, che un suo lato *LN* giaccia sul lato maggiore *FH* del triangolo. FIGURA IV.

Suppongasi inscritto il quadrato nel triangolo. Nell'esaminare questa figura si vedono due triangoli simili *FGH*, *KGM*,

e due triangoli rettangoli diſſimili *KLF*, *MNH*, i quali eſibiſcono parecchie incognite, che compongono ſoverchiamente la ſoluzione del problema. E' neceſſario adunque di tirare una qualche linea cognita, che faciliti queſta ſoluzione (§. 215 n. 4).

Dal punto *G* ſi tiri ſulla baſe *FH* la perpendicolare *GE*, queſta ſarà data (§. 217 n. 1), e ſaranno pure dati i ſegamenti *EF*, *EH* della baſe, e s' avranno in oltre per eſſa molti triangoli ſimili, per mezzo de' quali ſi potranno confrontare in più maniere i lati proporzionali. Fra queſte maniere noi ſceglieremo la ſeguente, comecchè conduca facilmente alla ſoluzione del problema.

$GE : FH :: GP : KM$,

e giacchè le rette *KM*, *KL* eſſer debbono fra loro uguali, per eſſere lati del quadrato, e che *KL* parallela alla *GE* uguaglia *PE*, così avremo l' eſpreſſione di *KM* indipendentemente dall' eſpoſto principio.

Diſtendaſi adunque il canone, e ſia

$GE = a$

$FH = x$

$GP = c$

ſarà $PE = KL = KM = a - x$, e ſoſti-

tuendo i valori analitici nel principio, sarà $a : c :: x : a - x$, e facendo il prodotto de' medj, e degli estremi, si ha $cx = a^2 - ax$, equazione primitiva, e finale, la quale risolta dà $x = \frac{a^2}{a+c}$.

220. Sulla data retta *FH* presa per ipotenusa descrivere un triangolo rettangolo, il quale abbia i tre lati in continua proporzione geometrica. FIGURA III.

Suppongasi descritto il triangolo *FGH* rettangolo in *G*, in cui sia *GH* il lato mezzano, ed *FG* il minore. Per risolvere il problema si vede facilmente, che i due principj necessarj consistono nella proprietà della proporzione continua, ed in quella del triangolo rettangolo; si scriva adunque il primo principio

$$FH : GH :: GH : FG,$$

e si scriva pure il secondo

$$\overline{FH}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{FG}^2$$

Dall' esposto del problema si vede facilmente, che i due catetti sono le incognite. Instituiscasi adunque il canone, e sia

$$FH = a$$
$$GH = x$$
$$FG = y$$

Sostituiscansi i valori analitici nel primo principio, e sarà $a : x :: x : y$, e quindi $ay = x^2$ equazione primitiva.

Sostituiscansi i valori analitici nel secondo principio, e s'avrà $a^2 = x^2 + y^2$, seconda equazione primitiva, in cui, se in vece di x^2 si scriverà il suo valore ay ricavato dalla prima, s' avrà l' equazione finale $a^2 = ay + y^2$; e operando a norma de' §. 198, 199, e 200, s' avrà

$a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + ay + y^2$, ed estratta la radice quadrata, sarà $y + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{5a^2}{4}}$, e quindi $y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$.

Se la retta data fosse il lato minore FG, allora, facendo nel canone $FG = a$, $GH = x$, $FH = y$, s' avrebbero le due equazioni primitive

1.ª $ay = x^2$

2.da $a^2 + x^2 = y^2$, e sostituendo in questa ultima ay in vece di x^2, si ha la finale $a^2 + ay = y^2$, la quale, risolta come sovra, somministra $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$.

FIGURA III. 221. Se del triangolo rettangolo FGH rettangolo in G, che ha i lati in continua proporzione geometrica, sarà data

ſolamente la ſuperficie, in ſimil caſo converrà all' uſo de' due principj addotti nell' antecedente paragrafo aggiugnere quello de' fattori, per cui ſi ha la ſuperficie.

Diſtendaſi il canone, e ſia

La ſuperficie del triangolo $= c^2$

Il lato minore $FG = x$

Il mezzano $GH = y$

L' ipotenuſa $FH = z$

ſarà il primo principio

$FG : GH :: GH : FH$

il 2.do principio $\overline{FH}^2 = \overline{GH}^2 + \overline{FG}^2$

il 3.° principio $\frac{GH \times FG}{2} = c^2$.

Soſtituiſcanſi in queſti principj i valori analitici, e s' avranno le tre equazioni primitive.

1.a $xz = y^2$

2.da $z^2 = y^2 + x^2$

3.a $\frac{yx}{2} = c^2$.

Si trovi nella prima il valore di $x = \frac{y^2}{z}$, e in vece di x ſi ſoſtituiſca il ſuo uguale $\frac{y^2}{z}$ nelle altre equazioni, e ſi avranno le due derivative

2.da $z^2 = y^2 + \frac{y^4}{z^2}$.

3.^{a} $\frac{y^3}{2z} = c^2$, e $z = \frac{y^3}{2c^2}$.

Se questo valore di z si sostituirà nella seconda equazione, s' avrà

$\frac{y^6}{4c^4} = y^2 + \frac{y^4}{\frac{y^6}{4c^4}}$, o sia, corretta l' espressione, $y^8 = 4c^4 y^4 + 16c^8$, equazione finale, la quale trattata a norma de' §. 198, 203 somministra $y^4 = 2c^4 \pm 2c^4 \sqrt{5}$, e $y = \sqrt[4]{2c^4 \pm 2c^4 \sqrt{5}}$. Col sostituire poi questo valore nella equazione $z = \frac{y^3}{2c^2}$ s' avrà l' ipotenusa, e mediante questa, ed il valore di y s' avrà poi quello di x, il tutto a norma di quanto s' è insegnato nella soluzione de' problemi numerici.

222. Nel cerchio del diametro cognito *FK* si è tirata dal centro *H* la retta cognita *HL*, che divide la corda *KE* pel mezzo in *L*. La tangente *KG* è segata in *G* dalla *FG* parallela alla *KE*. Cercasi il valore del rettangolo fatto dalla *KG* nella *KL*.

FIGURA V.

Dopo d' aver descritta la figura del problema, si riflette che, cadendo *FK* sulle parallele *FG*, *KE*, fa uguali gli

angoli alterni KFG, FKE, e che la retta HL, la quale divide per mezzo la corda KE, riesce perpendicolare sopra di questa, e quindi sono simili i triangoli rettangoli FKG, KLH.

La proprietà de' triangoli simili somministra la proporzione

$$FK : KG :: KL : HL,$$

e la proprietà del triangolo rettangolo somministra $\overline{KH}^2 - \overline{HL}^2 = \overline{KL}^2$.

A mente di questi due principj si distenda il canone, e sia

$$HK = HF = a$$
$$HL = c$$
sarà $FK = 2a$
$$KL = x$$
$$KG = y$$

Sostituiscansi i valori analitici nel primo principio, e s' avrà

$2a : y :: x : c$, e per la proprietà delle grandezze proporzionali s' avrà $2ac = xy$, prima equazione primitiva.

Sostituiscansi pure i valori analitici nel secondo principio, e s' avrà $a^2 - c^2 = x^2$, seconda equazione primitiva. Se nella prima si trova il valore di $x = \frac{2ac}{y}$, e questo si sostituisce nella seconda, si ha l'equa-

zione finale $a^2 - c^2 = \frac{4a^2c^2}{y^2}$, e quindi

$$y^2 = \frac{4a^2c^2}{a^2-c^2}, \text{ e } y = \sqrt{\frac{4a^2c^2}{a^2-c^2}}.$$

Si dee quì offervare, che dall' efpofto del problema, effendo noti gli angoli alterni *KFG*, *FKL*, fi può colla Trigonometria trovare a dirittura il valore delle *KL*, *KG*.

223. L' indefinita *GK* forma colla data FIGURA VI. *FG* l' angolo acuto *KGF* cognito. Si cerca nella *GK* un punto *H*, dal quale tirata la *FH* fia *FH* a *GH* nella data ragione di $m : n$.

Dall' efpofto del problema non appare la maniera di rifolverlo; onde nella propofta figura converrà tirare qualche linea cognita, che formi una qualche figura nuova (§. 215 n. 4). A tal fine dal punto *F* fi tiri *FD* perpendicolare alla *GK*; ficcome la retta *FG*, e l' angolo *G* fono cogniti, così faranno (§. 217 n. 1) anche noti i lati *FD*, *GD*. Si efamini ora, fe *FD* ftà a *GD*, come $m : n$; fe ciò fuccede, il problema è già rifolto.

Se poi la ragione di *FD* a *GD* farà minore di quella di $m : n$, converrà riflettere, che in fimil cafo il punto *H*, in

cui

cui s'incontrerà l' uguaglianza fralle due ragioni, dovrà essere tra i punti *G*, *D*, e se la ragione di *FD* a *GD* sarà maggiore della data, il punto *H* sarà da *D* verso *K*.

Suppongasi ora, che risulti quest'ultimo caso, converrà scrivere la condizione del problema $FH : GH :: m : n$, e s' avrà un principio.

Si osservi poi, che nel triangolo *FDH* rettangolo in *D* si trovano comprese le due linee, che si ricercano; onde per mezzo della proprietà di questo triangolo si avrà l'altro principio $\overline{FH}^2 = \overline{FD}^2 + \overline{DH}^2$;

Instituiscasi ora il canone, e sia

$FD = a$

$DG = c$

$FH = x$

$GH = y$

sarà $DH = y - c$

Sostituiscansi i valori nel primo principio, e sarà $x : y :: m : n$, e quindi $nx = my$ equazione primitiva.

Sostituiscansi i valori analitici nel secondo principio, e s' avrà $x^2 = a^2 + y^2 - 2cy + c^2$, seconda equazione primitiva; se nella prima si prenderà il valore di

$x = \frac{my}{n}$, e si sostituirà nella seconda, s' avrà l'equazione finale $\frac{m^2y^2}{n^2} = a^2 + y^2 - 2cy + c^2$, la quale maneggiata secondo le note regole, e supposto $m < n$, darà

$$y = \frac{cn^2}{n^2-m^2} \pm \sqrt{\frac{c^2n^4}{n^4-2n^2m^2+m^4} - \frac{a^2n^2-c^2n^2}{n^2-m^2}},$$

in cui i valori saranno immaginarj, ognorachè la quantità sotto il segno riuscirà negativa.

224. Le due rette indefinite *KL*, *KH* concorrenti in *K* sono date di posizione. FIGURA VII. Dal punto *G* fuori di esse si vuol tirare una retta *GF*, la quale nel segare *KH* in *D* faccia il triangolo *KDF* uguale alla data superficie *m n*.

Questo problema ha due casi, avvegnachè il punto *G* può essere fuori dell' angolo *HKL*, o essere compreso in quest' angolo. Noi principieremo a risolvere il primo caso.

Dall' esposto del problema espresso nella figura nulla si vede, che conduca immediatamente alla soluzione; fa d' uopo adunque tirare delle linee, e formare altre figure (§. 215 n. 4). Dal punto *D* si concepisca tirata *DE* perpendicolare al-

la KL, e dal punto G ſi tiri GP perpendicolare alla detta KL prolungata verſo Q, ſe ſia di biſogno, s'avranno i due triangoli ſimili DEF, GPF, eſſendo in queſt' ultimo note le rette GP, PK; ma perchè nel confrontare eſſi due triangoli s'incontrano le due incognite FE, ED, e che nel cercare la ſuperficie del triangolo KDF s'incontra un' altra incognita KF, così converrà tirare ancora altre linee.

Dal punto G ſi tiri GQ parallela alla KH, s'avranno i triangoli ſimili GQF, DKF, per mezzo de' quali s'arriverà alla ſoluzione del problema colle ſole incognite KF, DE.

Il primo principio ſi ha dalla ſeguente proporzione de' triangoli ſimili

$$QF : GP :: KF : DE$$

Il ſecondo principio conſiſte nei fattori KF, DE, i quali ſomminiſtrano la ſuperficie del triangolo KDF.

Inſtituiſcaſi adunque il canone, e ſia

$$QK = a$$
$$GP = c$$
$$KF = x$$
$$DE = y$$

ſarà $QF = a + x$.

Col ſoſtituire queſti valori analitici nel primo principio ſi ha $a + x : c :: x : y$, e quindi $cx = ay + xy$, equazione primitiva.

Soſtituiſcanſi i valori analitici nel ſecondo principio, e s'avrà $\frac{xy}{2}$ per la ſuperficie del triangolo KDF; ma queſta per l' eſpoſto del problema è uguale ad mn, adunque s'avrà $\frac{xy}{2} = mn$ per la ſeconda equazione primitiva, in cui, facendo $y = \frac{2mn}{x}$, e ſoſtituito queſto valore di y nell' altra, s' avrà l' equazione finale $cx = \frac{2amn}{x} + 2mn$, o ſia $x^2 - \frac{2mnx}{c} = \frac{2amn}{c}$ da trattarſi nel modo ſolito.

Sia poi nel ſecondo caſo il punto G compreſo nell' angolo HKL, come nella fig. 8. In ſimil riſcontro ſi farà la coſtruzione come prima, e valendoſi degli ſteſſi principj, ſi diſtenderà lo ſteſſo canone, in cui non s' incontrerà altro divario, fuorchè nel valore di QF, che ſi eſprimerà per $x - a$, e l'equazione finale ſarà $cx = 2mn - \frac{2amn}{x}$.

FIGURA VIII.

Si dee qui notare che, se il punto G cadesse nella KH, allora la quantità a sarebbe zero, e quindi il termine $\pm \frac{2amn}{x}$ dell' equazione finale scomparirebbe; onde questa sarebbe ridotta alla seguente $cx = 2mn$, ed $x = \frac{2mn}{c}$.

225. Nel triangolo scaleno FGH rettangolo in G è data la differenza FL fra i segamenti FK, KH della base formati dalla perpendicolare GK, ed è pure data la differenza FP fra i due catetti GF, GH, trovare la lunghezza di ciaschedun lato. FIGURA IX.

Dall' esposto del problema si vede, che i principj per instituire le equazioni primitive sono le proprietà del triangolo rettangolo, e siccome dallo stesso esposto si vede, che due sono le incognite; così convien maneggiare esse proprietà in due diverse maniere. Uno di questi principj somministra l' equazione primitiva $\overline{FH}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GH}^2$.

La stessa proprietà maneggiata in quest' altra maniera somministra un' altra equazione primitiva $\overline{FG}^2 - \overline{FK}^2 = \overline{GH}^2 - \overline{KH}^2$.

Instituiscasi adunque il canone, e sia

$FP = a$
$FL = c$
$GH = GP = x.$
$FH = y.$

sarà $FG = x + a$, e siccome dei due segamenti della base si ha la somma $= y$, e la differenza $= c$, così il segamento maggiore FK sarà $= \frac{y+c}{2}$, ed il minore KH sarà $= \frac{y-c}{2}$ (§. 163).

Sostituiscansi ora i valori analitici nel primo principio, e s' avrà $y^2 = x^2 + 2ax + a^2 + x^2$, o sia $y^2 = 2x^2 + 2ax + a^2$, e sostituendo i valori analitici nel secondo, s' avrà $x^2 + 2ax + a^2 - \frac{y^2 - 2cy - c^2}{4} = x^2 \frac{-y^2 + 2cy - c^2}{4}$, e correggendo l'espressione, sarà $2ax + a^2 = cy$. Preso in quest'equazione il valore di $y = \frac{2ax + a^2}{c}$, e sostituito in vece di y^2 nella prima, si ha l' equazione finale
$\frac{4a^2x^2 + 4a^3x + a^4}{c^2} = 2x^2 + 2ax + a^2$ da maneggiarsi secondo le date regole.

Si dee quì osservare, che la seconda equazione primitiva $2ax + a^2 = cy$ si può ottenere a dirittura per un' altra strada. Suppongasi fatto $KL = KH$, e tirata la GL, s' avranno le tre rette uguali GH, GL, GP. Pertanto, se dal centro G si descriverà coll' intervallo GH il cerchio $HLPQ$, questo passerà per li punti L, P. Se si prolunga PG sino all' incontro Q della circonferenza, s' avrà per la proprietà del cerchio quest' altro principio. Il rettangolo di FQ nella FP uguale al rettangolo di FH nella FL; e giacchè $PQ = 2x$; così sostituiti i valori analitici, s' avrà $\overline{a+2x} \times a = y \times c$, cioè $2ax + a^2 = cy$.

226. Se il triangolo scaleno sarà ottusangolo in G, o pure acutangolo, in simil caso per determinare il problema sarà necessario di aggiugnervi un' altra condizione.

Suppongasi, che per questa condizione sia data la differenza $= d$ fra il lato GH, e la perpendicolare GK, onde questa sia espressa per $x - d$, converrà servirsi dell' equazione primitiva $2ax + a^2 = cy$, e per avere l' altra si farà uso della proprietà del triangolo rettangolo GKH, avvegnachè in questo s' incontra una espressione

P 4

più ſemplice $\overline{GH}^2 = \overline{GK}^2 + \overline{KH}^2$, e ſcrivendo i valori analitici, ſarà $x^2 = x^2 - 2dx + d^2 + \frac{y^2 - 2cy + c^2}{4}$, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà $8dx = 4d^2 + y^2 - 2cy + c^2$.

Se nell'altra equazione primitiva $2ax + a^2 = cy$ ſi troverà il valore di $x = \frac{cy - a^2}{2a}$, e ſi ſoſtituirà in queſt'ultima, s'avrà l'equazione finale $8d \times \frac{cy - a^2}{2a} = 4d^2 + y^2 - 2cy + c^2$ da trattarſi colle date regole.

Coſtruire geometricamente i valori dell' incognita ottenuti nella riſoluzione dell' equazione finale.

227. Ridotti i problemi geometrici a equazione finale, e queſta riſolta a norma delle regole ſpiegate in queſta ſeconda parte, d' uopo è convertire in linee le eſpreſſioni algebraiche. Queſt' operazione ſi dice *coſtruire geometricamente l' equazione.*

I principj, ed i maneggi da praticarſi in queſte coſtruzioni ſono i ſeguenti.

228. Nelle equazioni di primo grado il valore dell' incognita dee eſſere ridotto a queſta eſpreſſione ſempliciſſima $x = \pm a$.

Se nel risolvere l'equazione s'otterrà questa forma, non sarà necessario di fare alcuna costruzione, ma, se l'espressione conterrà due, o più lettere cognite, si opererà come segue.

Abbiasi da costruire l'equazione $y=a\pm c$; si tira una retta indefinita KL, e preso in essa un punto K ad arbitrio, si nota da K in H la lunghezza $KH=a$, e, se la lettera c avrà il segno più, si farà $HI=c$, onde sarà $KI=y=a+c$, da esprimersi con una lettera diversa, e per esempio $=K$: se contrariamente c avrà il segno negativo, si farà $HO=c$; onde sarà $KO=y=a-c=d$ altra lettera diversa. Nella stessa maniera si costruirà l'equazione $z=5a\pm 7d$; imperciocchè basterà fare KH cinque volte la linea $=a$, e se $7d$ sarà positivo, si farà HI sette volte la linea $=d$, onde s'avrà $KI=z=5a+7d=c$. Se poi $7d$ sarà quantità negativa, se ne porterà la sua estensione da H in O, e sarà $KO=5a-7d=f$. FIGURA X.

Occorrendo, che la lunghezza $7d$, oltrepassando il punto K, arrivi in P, allora sarà negativo il valore $KP=z=5a-7d=-f$. Questa stessa riflessione ha luogo per l'equazione $y=a-c$; dovendosi quì osservare, che i Geometri hanno

in costume di notare i valori positivi dalla sinistra verso la destra, come da K verso L, ed i negativi dalla destra verso la sinistra, come da K verso P.

Per costruire l' equazione $x = \pm \frac{3c}{2}$ basta fare una retta tripla della c, e prenderne la metà per avere il valore di x.

229. Le equazioni del primo grado, che s' incontrano più composte, possono essere ridotte alle seguenti espressioni

1.ª $y = \pm \frac{ac}{d}$, 2.da $z = \pm \frac{acf}{dg}$, 3.ª $x = \frac{abc}{m^2 \pm n^2}$, 4.ª $y = \frac{dcf^2 \pm a^2 bg}{c^2 m + bgn}$.

Per costruire la prima equazione $y = \pm \frac{ac}{d}$ conviene trovare una quarta proporzionale alle tre rette date d, a, c nel modo insegnato nella Geometria, facendo per esempio $KH = d$, $KL = a$, e, dopo d'aver tirata KP, la quale forma colla KL un angolo qualsivoglia, si fa $KG = c$, e, tirando dal punto L la retta LP parallela alla GH, si ha $KP = y = \pm \frac{ac}{d}$ da esprimersi con un' altra lettera diversa, e per esempio per $\pm f$; onde sarà $y = \pm \frac{ac}{d}$

FIGURA XI.

$= \pm f = KP$ quarta proporzionale.

La ſteſſa coſtruzione avrà luogo, ſe s' incontrerà l'equazione $y = \pm \frac{a^2}{d}$, trattandoſi in queſto caſo di trovare una terza proporzionale alle due rette date d, a. Il tutto conformemente alle coſe già dette (§. 217 n. 3).

230. Se per coſtruire la ſeconda equazione (§. 229) $z = \pm \frac{acf}{dg}$ ſi ſcriverà la medeſima in queſt'altra maniera $z = \pm \frac{ac}{d} \times \frac{f}{g}$, ſi vedrà toſto, che l'eſpreſſione $\frac{ac}{d}$ è una quarta proporzionale, la quale a tenore dell' antecedente paragrafo ſi può eſprimere per un'altra lettera cognita, e per eſempio $\frac{ac}{d} = b$; ſi ſcriva adunque b in vece di $\frac{ac}{d}$, e s'avrà $z = \pm \frac{bf}{g}$, cioè z quarta proporzionale alle tre rette date g, b, f, che ſi eſprimerà per p, onde $z = \pm p$.

Nella ſteſſa maniera ſe il valore dell' incognita ſarà più compoſto, come $z = \frac{acfh}{dgl}$, baſterà ſcriverlo come ſovra $z = \frac{ac}{d} \times \frac{f}{g} \times \frac{h}{l}$;

quindi in vece di $\frac{ac}{d}$ ſi ſcriverà b, e ſarà $z = \frac{bf}{g} \times \frac{h}{l}$, e ſcrivendo p in vece di $\frac{bf}{g}$, s' avrà $z = \frac{ph}{l}$ quarta proporzionale, che eſpreſſa per q darà $z = q$.

Occorrendo, che s' abbia un maggior numero di lettere nel numeratore, e nel denominatore, ſi continuerà a procedere nello ſteſſo modo, per mezzo del quale ſi eſcludono anche le quantità eſpreſſe in forma di rotto.

231. Volendo ſemplificare in un' altra maniera le equazioni $z = \frac{acf}{dg}$, $x = \frac{b^2dK^2}{m^2fg}$ ec. convien nel denominatore ſoſtituire una, o più delle lettere, che ſono nel numeratore, e indi correggere l' eſpreſſione. A tal fine ſi rifletta, che nell'equazione $z = \frac{acf}{dg}$ il denominatore dg rappreſenta un rettangolo, e che in ſua vece ſe ne può ſoſtituire un altro uguale, il quale abbia per lato una delle lettere del numeratore, e per eſempio f. Suppongaſi adunque $dg = fm$, ſarà $\frac{dg}{f} = m$, vale a dire che, trovando una quarta proporzionale alle tre date f, d, g,

s' avrà il valore cognito di m (§. 229.). Si ſcriva adunque fm in vece di dg nella equazione $z = \frac{acf}{dg}$, e s'avrà $z = \frac{acf}{fm}$, e correggendo l' eſpreſſione, ſarà $z = \frac{ac}{m}$, cioè z quarta proporzionale alle tre date m, a, c.

Nella ſteſſa maniera, ſe l' equazione ſarà più compoſta, e per eſempio $z = \frac{acfh}{dgl}$, per ridurla a eſpreſſione più ſemplice ſi ſcriverà $z = \frac{acf}{dg} \times \frac{h}{l}$; ſi trasformi il rotto $\frac{acf}{dg}$ nell' altro $\frac{acf}{fm}$, e corretta l' eſpreſſione ſi regiſtri nell' equazione, s' avrà $z = \frac{ac}{m} \times \frac{h}{l} = \frac{ach}{ml}$. Per ſemplificare ora queſt' ultima eſpreſſione, ſuppongaſi come prima un rettangolo, il quale abbia una delle lettere del numeratore, e per eſempio c, e ſia queſto uguale al dato ml, ſarà $ml = cn$, e quindi $\frac{ml}{c} = n$, quarta proporzionale alle tre rette date c, m, l. Soſtituiſcaſi cn in vece di ml nell'equazione, e s' avrà $z = \frac{ach}{cn}$, e, corretta l'eſpreſſione, ſarà $z = \frac{ah}{n}$, quarta proporzionale

(§. 229) alle tre date n, a, h; che si esprimerà per q, onde $z = q$.

La stessa operazione servirà, allorchè l'equazione avrà un maggior numero di lettere nel numeratore, e nel denominatore.

232. Allorchè il denominatore avrà due termini, come nella terza equazione $x = \frac{abc}{m^2 \pm n^2}$ (§. 229), si troverà il valore dell'incognita col trasformare un termine del divisore in modo, che contenga una lettera di quelle, che sono nell' altro termine (§. 231). Per esempio si trasformerà il termine n^2 in un altro eguale, che abbia la lettera m; se sia per esempio $n^2 = mp$, sarà $\frac{n^2}{m} = p$ terza proporzionale alle due rette date m, n; sostituendo adunque mp in vece di n^2 nell' equazione $x = \frac{abc}{m^2 \pm n^2}$, s' avrà $x = \frac{abc}{m^2 \pm mp} = \frac{abc}{m \times \overline{m \pm p}}$ e facendo $m \pm p = q$ (§. 228), sarà $x = \frac{abc}{mq}$ da trattarsi a norma del §. 230, affine di avere il suo valore in una sola linea $= K$.

Nella stessa maniera si dovrà procedere, se il denominatore del rotto avrà più di

due termini; e per esempio se sia $z = \frac{abc}{m^2 + n^2 + gf}$ basterà convertire i due termini n^2, fg in due altri uguali, che abbiano la lettera m, facendo per esempio $n^2 = mK$, $fg = ml$, e sostituendo nell'equazione questi termini trasformati, sarà $z = \frac{abc}{m^2 + mK + ml} = \frac{abc}{m \times \overline{m + K + l}}$ e facendo $m + K + l = q$, sarà $z = \frac{abc}{mq}$ da ridursi in una sola linea.

233. Per ultimo, se s'abbia la quarta equazione (§. 229) $y = \frac{dcf^2 \pm a^2 bg}{c^2 m + bgn}$, nella quale si ha più di un termine nel numeratore, basterà in simil riscontro disgiugnere essi termini, come segue $y = \frac{dcf^2}{c^2 m + bgn} \pm \frac{a^2 bg}{c^2 m + bgn}$, indi si tratterà ciaschedun rotto separato, come s'è fatto nell'antecedente paragrafo, finchè il valore dell'incognita sia ridotto a una linea semplice.

Per esempio se nel rotto $\frac{cdf^2}{c^2 m + bgn}$ si farà (§. 231) $hg = cK$, s'avrà $\frac{dcf^2}{c^2 m + cKn} = \frac{df^2}{cm + Kn}$; e se nel rotto $\frac{a^2 bg}{c^2 m + bgn}$ si farà

$cm = gl$, s' avrà $\frac{a^2 bg}{cgl + bgn} = \frac{a^2 b}{cl + bn}$, onde sarà $y = \frac{df^2}{cm + Kn} \pm \frac{a^2 b}{cl + bn}$, e trattando indi ciascun rotto separatamente, come s' è fatto nell' antecedente paragrafo per ridurne il valore in una sola linea cognita, s'avrà $y = p \pm q = r$ (§. 228).

234. Se col mezzo delle fatte premesse si vorrà costruire il valore di $FH = \frac{c^2 - 4a^2}{2c}$ ottenuto nella soluzione del problema (§. 218), basterà disgiugnere i termini in due rotti, e sarà $FH = \frac{c^2}{2c} - \frac{4a^2}{2c} = \frac{c}{2} - \frac{2a^2}{c}$, di maniera che, dopo d' aver trovato una quarta proporzionale alle tre rette c, a, $2a$, se questa quarta si sottrerrà dalla metà di c, l' avanzo espresso per la lettera diversa p sarà il valore di $FH = p$.

E così ancora per costruire l'equazione $x = \frac{a^2}{a+c}$ ottenuta nella soluzione del problema (§. 219), basterà trovare una terza proporzionale alle due rette $a + c$, ed a.

235.

235. Negli esempj addotti delle equazioni di primo grado il valore dell' incognita era espresso da lettere indicanti una linea. Ma se occorra, che il valore venga additato dal prodotto di due, o più lettere, come $x = ab$, o $y = c^2 d$ ec., in questo caso è segno certo, che nel distendere il canone non sono state espresse le quantità in una maniera conveniente, vale a dire che le linee non sono state registrate con una sola lettera, le superficie col prodotto di due lettere, i solidi col prodotto di tre lettere ec.

Per costruire questi valori fa d' uopo scegliere una lunghezza arbitraria per l'unità, colla quale si pareggeranno poi le altre rette date nel problema.

Che la lunghezza esprimente l' unità sia arbitraria in ciascun problema si osserva cotidianamente nelle solite maniere di misurare, avvegnachè per fare queste misure si usa indifferentemente il trabucco, la tesa, il pieliprando, il piede d' Inghilterra, il braccio Milanese, il palmo Romano ec., le quali unità sono tutte fra loro diverse, e la sola avvertenza, che si ha in questo procedimento, consiste nell'adoperare la stessa unità, allorchè si debbono pareggiare le grandezze.

Ciò posto, per rendere lineare l' espressione $x = ab$ senza alterare il valore dei dati del problema, si scriverà $x = \frac{ab}{1}$, vale a dire che x è quarta proporzionale alla lunghezza presa arbitrariamente per l' unità, ed alle due rette a, b date nel problema. L' espressione $y = c^2d$ si scriverà in quest' altra maniera $y = \frac{c^2d}{1 \times 1} = \frac{c^2}{1} \times \frac{d}{1}$ da trattarsi poi a norma del §. 230.

Occorrendo, che l'equazione fosse $z = \frac{a}{a}$, allora si fa chiaro, che z uguaglia l' unità, la cui lunghezza sarà pure arbitraria, se non sarà già stata vincolata nelle condizioni del problema.

236. Nelle equazioni composte addotte (§. 229) si osserva, che il numeratore del rotto ha sempre una dimensione di più del denominatore, la qual cosa è conforme all' espressione, che si conviene alla terza, ed alla quarta proporzionale; ma, qualora s' incontra qualche equazione, in cui questa legge non è osservata, è anche segno certo, che non si è disteso il canone colle dovute avvertenze.

In questo riscontro fa d' uopo moltiplicare il numeratore, od il denominatore

tante volte per l' unità, finchè s' arrivi a segno di avere nel numeratore una dimensione di più di quelle, che sono nel denominatore; e così l' equazione $x = \frac{abc}{d}$ si scriverà $x = \frac{abc}{1 \times d}$, l'equazione $y = \frac{m^3 n^2}{ac}$ si scriverà $y = \frac{m^3 n^2}{1 \times 1 \times ac}$, l'equazione $z = \frac{dfg^2}{am - nc}$ si scriverà $z = \frac{dfg^2}{1 \times am - 1 \times nc}$, l'equazione $x = \frac{cd}{gf}$ si scriverà $x = \frac{1 \times cd}{gf}$, l'equazione $y = \frac{bg}{a^3 mn}$ si scriverà $y = \frac{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times bg}{a^3 mn}$, e così di altre.

Tutte queste espressioni si maneggeranno poi colle regole quì avanti date, affine di ridurre il valore dell' incognita a una sola linea.

237. Nelle equazioni finali pure del secondo grado, dopo che si sono fatti passare tutti i termini cogniti da una banda per lasciare l'incognita sola nell'altro membro, convien ridurre tutti essi termini in un solo, di maniera che l' equazione sia ridotta a una di queste due espressioni semplicissime 1.ª $x^2 = a^2$, 2.ª $y^2 = bc$. Nella prima di queste equazioni basterà estrar-

re la radice quadrata, e s' avrà $x = \pm a$, e nella seconda si troverà una proporzionale di mezzo fralle due rette b, c, e s' avrà $y = \pm \sqrt{bc}$ (§. 217 n. 3): notandosi, che, se la quantità cognita sarà negativa, i valori dell' incognita saranno immaginarj (§. 18)

238. Per applicare l' addotta regola ai FIGURA XII. casi particolari (§. 237) suppongasi, che la quantità cognita abbia diversi termini espressi in forma di quadrato, come $z^2 = d^2 \pm f^2 \pm g^2$; se questi avranno il segno più, si sommeranno insieme geometricamente per mezzo della proprietà del triangolo HKL rettangolo in K, poichè, facendo $KL = d$, $KH = f$, sarà l' ipotenusa HL il lato del quadrato $= d^2 + f^2$ da esprimersi con un' altra lettera, e per esempio $= m^2$; s' alzi in seguito HP perpendicolare sull' ipotenusa HL, e si faccia $HP = g$, sarà PL il lato del quadrato uguale $m^2 + g^2 = n^2$, e quindi $z = n = PL$.

Se poi qualche termine avrà il segno negativo, e per esempio $- g^2$, in simil riscontro sulla $HL = m$, che somministra la somma dei quadrati positivi, si descriverà un semicerchio HRL, in cui si adatterà la corda $LR = g$, e sarà l' altra corda $RH = q$ il lato del quadrato, che es-

prime la differenza $m^2 - g^2 = q^2$, e quindi farà $z = q = HR$.

Se poi i termini della quantità cognita faranno efpreffi in forma di rettangoli, converrà ridurli tutti alla medefima altezza, e quindi fommarli, o fottrarli, fecondochè avranno il fegno più, o meno; per efempio, fe s' abbia l' equazione $x^2 = bc + gd - fl$, fi ridurranno i termini gd, fl all' altezza $= b$, facendo $bm = gd$, $bn = fl$ (§. 231), e s' avrà $x^2 = bc + bm - bn$, o fia $x^2 = b \times \overline{c+m-n}$, e facendo la retta $c + m - n = p$ (§. 228), farà $x^2 = bp$, onde, trovando una proporzionale di mezzo tra b, e p, farà $x = \pm\sqrt{bp}$. Se s' avrà l'equazione $z^2 = \frac{7cm}{3}$, fi fcriverà $z^2 = \frac{7c}{3} \times m$ per l'efpreffione dei due lati componenti il rettangolo, fra i quali trovando la proporzionale di mezzo, farà $z = \sqrt{\frac{7c}{3} \times m}$.

239. Qualora la quantità cognita farà efpreffa in forma di rotto, converrà ridurla a una delle due efpreffioni femplici (§. 237) nella feguente maniera.

Abbiafi $z^2 = \frac{gmn^2}{Kd}$; fe la medefima fi

ſcriverà in queſta conformità $z^2 = \frac{gm}{K} \times \frac{n^2}{d}$, ſi vedrà toſto, che, trovando una quarta proporzionale $= b$ alle tre rette K, g, m, s'avrà un lato del rettangolo, e trovando una terza proporzionale $= c$ alle due rette d, n, s'avrà l'altro lato del rettangolo, onde ſarà $z^2 = \frac{g m n^2}{cd} = bc$, e quindi $z = \sqrt{bc}$.

Occorrendo, che l'eſpreſſione ſia più compoſta, come $x^2 = \frac{a^2 c d^3}{f^2 g h}$, ſi potrà dividere come ſovra la quantità cognita $x^2 = \frac{a^2 c}{f^2} \times \frac{d^3}{gh}$, e a tenore del §. 230 ſi eſprimeranno con due quarte proporzionali p, q i rotti $\frac{a^2 c}{f^2}$, $\frac{d^3}{gh}$, e s'avrà $x^2 = pq$, ed $x = \sqrt{pq}$.

240. Se il numeratore, o il denominatore, o ambidue inſieme avranno più di un termine, baſterà ridurre eſſi termini a un ſolo (§. 238), indi ſi opererà a tenore dell' antecedente paragrafo. Per eſempio volendo coſtruire l'equazione finale $y^2 = \frac{4a^2c^2}{a^2 - c^2}$ del problema riſolto (§. 222), ſi farà $a^2 - c^2 = g^2$ (§. 238), onde s'avrà

$y^2 = \frac{4a^2c^2}{g^2}$, e giacchè il numeratore, ed il denominatore ſono una poteſtà perfetta, ſe ne eſtrarrà la radice quadrata ſenz'altra trasformazione, e s' avrà $y = \frac{2ac}{g} = f$, quarta proporzionale alle tre rette cognite g, $2a$, c.

241. Se la quantità cognita ſarà eſpreſſa in maniera tale, che non abbia la forma di ſuperficie, converrà valerſi dell'unità (§. 235), affinchè il numeratore ſuperi ſempre il denominatore di due dimenſioni; e così l' equazione $x^2 = abc$ ſi ſcriverà $x^2 = \frac{abc}{1}$, l' equazione $y^2 = d$ ſi ſcriverà $y^2 = 1 \times d$, l' equazione $z^2 = \frac{m^2c^2}{d}$ ſi ſcriverà $z^2 = \frac{m^2c^2}{1 \times d}$, l'equazione $x^2 = \frac{ad}{m^2f}$ ſi ſcriverà $x^2 = \frac{1 \times 1 \times 1 \times ad}{m^2f}$, l'equazione $y^2 = \frac{bc \pm hl}{m+n}$ ſi ſcriverà $y^2 = \frac{1 \times bc \pm 1 \times hl}{m+n}$, e così di altre.

242. Per coſtruire le quadratiche affette, converrà ridurle a una di queſte due eſpreſſioni canoniche (§. 200) $x^2 \pm 2ax = \pm c^2$, $x^2 \pm ax = \pm bd$; baſtando per ciò praticare le addotte regole nella trasformazione delle eſpreſſioni algebraiche.

Per farne l' applicazione alle equazioni finali trovate nella ſoluzione de' problemi geometrici, ſi prenda l'equazione $x^2 - \frac{2mnx}{c} = \frac{2amn}{c}$ ottenuta al §. 224; per ridurla ad una delle canoniche, baſterà fare $\frac{mn}{c} = a$, e s'avrà $x^2 - 2ax = 2a^2$.

Si oſſervi, che l'equazione $y^2 - ay = a^2$ ottenuta nella ſoluzione del problema (§. 220) è riuſcita naturalmente ridotta all' eſpreſſione canonica.

243. Allorchè le equazioni finali ſono molto compoſte, converrà primieramente traſportare tutti i termini, ne' quali trovaſi la maſſima poteſtà, da quella banda, in cui eſſa maſſima poteſtà rieſce poſitiva, liberarla in ſeguito da qualunque coefficiente, e diviſore, indi ſcrivere gli altri termini, ne' quali trovaſi l' incognita lineare, uno ſotto l' altro, o pure a fianco, e traſportare tutti i termini cogniti nell' altro membro.

Abbiaſi l' equazione finale $4a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 2c^2x^2 + 2ac^2x + a^2c^2$ ottenuta (§. 225): ſiccome dai dati del problema ſi ricava, che $4a^2$ ſia maggiore di $2c^2$, così l' equazione ſi ordinerà, come ſegue $\overline{4a^2 - 2c^2} \times x^2$

$+\overline{4a^3-2ac^2} \times x = a^2c^2 - a^4$, e liberando x^2 dal coefficiente, sarà $x^2 + \frac{\overline{4a^3 - 2ac^2}}{4a^2 - 2c^2} \times x = \frac{a^2c^2 - a^4}{4a^2 - 2c^2}$. Riducasi ora a tenore delle cose insegnate (§. 201) la quantità $\frac{4a^3-2ac^2}{4a^2-2c^2}$ a una sola linea $= p$; si riduca pure il secondo membro $\frac{a^2c^2-a^4}{4a^2-2c^2}$ in una sola superficie $= fg$ (§. 240), e scrivendo queste espressioni nella proposta finale, si troverà la medesima trasformata in questa canonica $x^2 + px = fg$.

Per trasformare l'equazione finale $\frac{8dy}{2a} \times \overline{cy-a^2} = 4d^2 + y^2 - 2cy + c^2$ ottenuta (§. 226), si farà l'attuale moltiplica del primo membro, e s' avrà $\frac{4cdy}{a} - 4ad = 4d^2 + y^2 - 2cy + c^2$, e ordinando l'equazione, sarà $-4ad - 4d^2 - c^2 = y^2 - \overline{2c - \frac{4cd}{a}} \times y$, e esprimendo $-2c - \frac{4cd}{a}$ colla lettera $= -p$, e la quantità $-4ad - 4d^2 - c^2$ colla superficie $-fg$, la proposta finale sarà trasformata in questa canonica $-fg = y^2 - py$.

Per trasformare l' equazione finale $\frac{m^2y^2}{n^2} = a^2 + y^2 - 2cy + c^2$ ottenuta (§. 223), e ridurla ad una delle espressioni canoniche, si moltiplicherà per n^2; e siccome nel caso nostro si ha dai dati del problema $m < n$, così l' equazione si ordinerà come segue, $- a^2 n^2 - c^2 n^2 = \overline{n^2 - m^2} \times y^2 - 2cn^2y$, e liberando dal coefficiente la massima potestà dell' incognita, sarà $\frac{- a^2n^2 - c^2n^2}{n^2 - m^2} = y^2 - \frac{2cn^2y}{n^2 - m^2}$, e facendo $\frac{-a^2n^2 - c^2n^2}{n - m^2}$ uguale alla superficie $-cd$, e la quantità $\frac{cn^2}{n^2 - m^2}$ uguale alla retta b, l' equazione proposta sarà trasformata in questa canonica $-cd = y^2 - 2by$.

244. Ridotte le equazioni affette di secondo grado a una delle espressioni canoniche, basterà, per avere i valori algebraici dell' incognita, aggiugnere in ciaschedun membro il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, e indi estrarre la radice quadrata (§. 199), dopo del che si lascerà l' incognita sola in un membro dell' equazione.

Per risolvere adunque l' equazione canonica $x^2 \pm 2ax = \pm c^2$, aggiungasi il qua-

drato di a metà del coefficiente del secondo termine, e s' avrà $x^2 \pm 2ax + a^2 = \pm c^2 + a^2$, cavisi la radice quadrata, e sarà $x \pm a = \pm \sqrt{a^2 \pm c^2}$, ed $x = \mp a \pm \sqrt{a^2 \pm c}$, soluzione generalissima. La stessa regola si praticherà per l'altra espressione canonica $x^2 \pm ax = \pm bd$.

245. Per costruire geometricamente il valore dell' incognita, convien distinguere in due casi la sua espressione, cioè quando la quantità c^2 è positiva, e quando ella è negativa.

Nel primo caso la soluzione generalissima sarà espressa come segue $x = \mp a \pm \sqrt{a^2 + c^2}$. FIGURA XIII.
Per costruirla facciasi la retta $GH = c$, all' estremità G s' alzi la perpendicolare $GK = a$, cioè uguale alla metà del coefficiente di x, e fatto centro in K coll' intervallo KG si descriva il cerchio GLF, e si tiri HK, finchè incontri in F la circonferenza del cerchio, sarà HF un valore dell' incognita, e sarà HL l' altro valore.

Per dimostrarlo si rifletta, che l' ipotenusa KH è uguale alla quantità $\sqrt{a^2 + c^2}$; e però, se si piglia questo valore positivo, e vi si aggiugne la quantità a, che è fuori del segno, sarà $x = HF = HK + KF = \sqrt{a^2 + c^2} + a$, e se la quantità a sarà ne-

gativa; si avrà $x = HL = HK - KL = \sqrt{a^2+c^2} - a$.

Se poi si piglia $\sqrt{a^2+c^2}$ negativo, e sia positivo a, sarà $x = -HK + KL = HL = -\sqrt{a^2+c^2} + a$, valore negativo, e se sarà negativa anche la quantità a, s' avrà $x = HF = -a - \sqrt{a^2+c^2}$.

Da questa costruzione si comprende, che è sempre possibile la soluzione di que' problemi del secondo grado, in cui la quantità c^2 è positiva.

246. Per costruire le quadratiche affette appartenenti al secondo caso, cioè quando c^2 è negativo, come nell' equazione $x = \mp a \pm \sqrt{a^2-c^2}$, si fa la retta $GH = c$, all' estremità G s' alza la perpendicolare $GK = a$, cioè uguale alla metà del coefficiente di x, e fatto centro in K coll'intervallo KG si descrive il cerchio GLF, e dal punto H si tira HLF parallela alla perpendicolare GK, sarà HF un valore di x, ed HL un altro valore. FIGURA XIV.

Per dimostrarlo dal centro K si tirino i raggi KF, KL ai punti L, F, ne'quali HF interseca la circonferenza, e dallo stesso centro K si tiri KD perpendicolare sulla HF, sarà $KD = GH = c$, e $DH = GK = a$; e sarà $DL = DF = \sqrt{a^2-c^2}$; e però, se si piglia $\sqrt{a^2-c^2}$ positivo, come pure la quan-

tità a, che è fuori del ſegno, ſarà $x = HF = HD + DF = a + \sqrt{a^2 - c^2}$, e ſe la quantità a ſarà negativa, ſarà pure negativo il valore di $x = HL = -a + \sqrt{a^2 - c^2}$.

Se poi ſi piglierà negativo il radicale $\sqrt{a^2 - c^2}$, e poſitiva la quantità a, ſarà pure poſitivo il valore di $x = HD - DL = a - \sqrt{a^2 - c^2}$, e ſe a ſarà anche negativo, riuſcirà pure negativo il valore di $x = HD + DF = -a - \sqrt{a^2 - c^2}$.

Da queſta coſtruzione ſi comprende facilmente che, quando $GH = c$ ſarà minore di a, la retta HF ſegherà il cerchio, e quindi ſi avranno due valori diſuguali di x. Quando $c = a$, la retta HF toccherà il cerchio, e quindi i due valori di x ſaranno uguali ciaſcheduno al raggio a del cerchio; e ſarà $c > a$, la lettera HF più non ſegherà, nè toccherà il cerchio, e quindi la ſoluzione del problema ſarà neimpoſſibile, riuſcendo in queſto caſo negativa la quantità $a^2 - c^2$ ſotto il ſegno radicale.

Si ſcorge adunque che, qualora nei problemi di ſecondo grado le radici ſono immaginarie, avviene una tal coſa da voler ſegare il cerchio con una retta parallela al diametro, e da queſto diſtante per un intervallo maggiore del raggio.

247. Per mezzo delle cose spiegate sarà anche facile di costruire i valori delle equazioni di quarto grado pure, e di quelle affette del quarto, e dell' ottavo grado, che sono derivative del secondo.

Abbiasi l' equazione $y^4 = c^4 \pm f^3 K$. Per mezzo delle cose insegnate si trasformi il termine $f^3 K$ in modo, che contenga due dimensioni dell' altro termine c^4, e sia $c^2 m^2 = f^3 K$, sarà $y^4 = c^4 \pm c^2 m^2$, si estragga la radice quadrata, e sarà $y^2 = \sqrt{c^4 \pm c^2 m^2}$; si cavi fuori del segno radicale la quantità c^2, s' avrà $y^2 = c\sqrt{c^2 \pm m^2}$. In questa espressione si osserva, che, se m^2 è positivo, sarà $\sqrt{c^2 + m^2}$ l'ipotenusa del triangolo rettangolo, i cui catetti sono c, m, e chiamando quest' ipotenusa $= p$, sarà $y^2 = c\sqrt{c^2 + m^2} = cp$, e quindi $y = \sqrt{cp}$.

Se m^2, essendo negativo, sarà maggiore di c^2, le radici saranno immaginarie; ma se $c^2 > m^2$, allora $\sqrt{c^2 - m^2}$ sarà un catetto del triangolo rettangolo, la cui ipotenusa sarà $= c$, e l' altro catetto $= m$; pertanto, se sia $\sqrt{c^2 - m^2} = q$, sarà $y^2 = c\sqrt{c^2 - m^2} = cq$, e $y = \sqrt{cq}$.

Le cose quì avanti spiegate bastano per trasformare, e ridurre alla forma $y^4 = c^4 \pm c^2 m^2$ tutte le equazioni del quarto grado pure.

248. Le medesime regole servono per costruire i valori delle incognite nelle equazioni di quarto grado affette, allorchè sono derivative del secondo grado; a tal fine si ridurranno tutte queste equazioni alla seguente forma $x^4 \pm 2a^2x^2 = \pm c^4$. Ciò fatto aggiungasi da ambe le parti il quadrato della metà del coefficiente di x^2, e s' avrà $x^4 \pm 2a^2x^2 + a^4 = a^4 \pm c^4$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, sarà $x^2 \pm a^2 = \sqrt{a^4 \pm c^2}$. Si trasformi questo radicale nell'espressione $a\sqrt{a^2 \pm m^2}$ (§. 247), e fatto $\sqrt{a^2 \pm m^2} = p$, s' avrà $x^2 = \mp a^2 \pm ap$, e supposto che la quantità cognita ap sia positiva, sarà $x = \sqrt{a^2 \pm ap}$ $= \sqrt{a \times \overline{a \pm p}}$.

249. Le equazioni dell' ottavo grado affette, le quali sono derivative del secondo, si maneggiano pure nella stessa maniera, dovendosi prima ridurre a questa forma $z^8 \pm 2a^4z^4 = \pm c^8$. Ciò fatto aggiungasi da ambe le parti il quadrato della metà del coefficiente di z^4, s' avrà $z^8 \pm 2a^4z^4 + a^8 = a^8 \pm c^8$, ed estratta la radice quadrata da ambe le parti, sarà $z^4 \pm a^4 = \pm \sqrt{a^8 \pm c^8}$. Si trasformi il termine c^8 in un altro, che contenga a^4, onde sia $c^8 = a^4m^4$, sarà $\sqrt{a^8 \pm c^8} = \sqrt{a^8 \pm a^4m^4}$, e cavando a^4 fuori del segno, sarà $\sqrt{a^8 \pm a^4m^4}$ $= a^2\sqrt{a^4 \pm m^4}$.

Si tratti questo radicale $\sqrt{a^4 \pm m^4}$, come si è fatto nel (§. 247) col trasformare il termine m^4 in un altro, che contenga il quadrato di a^2, e sia per esempio $m^4 = a^2 n^2$, sarà $a^2 \sqrt{a^4 \pm m^4} = a^2 \sqrt{a^4 \pm a^2 n^2}$, e cavando a^2 fuori del segno radicale, sarà $a^2 \sqrt{a^4 \pm a^2 n^2} = a^3 \sqrt{a \pm n^2}$, e facendo $\sqrt{a^2 \pm n^2} = p$, sarà $a^3 \sqrt{a^2 \pm n^2} = a^3 p = \sqrt{a^8 \pm c^8}$, onde sostituendo $a^3 p$ nell'equazione $z^4 \pm a^4 = \pm \sqrt{a^8 \pm c^8}$, s'avrà $z^4 \pm a^4 = \pm a^3 p$, e quindi $z^4 = \mp a^4 \pm a^3 p$, e supposto che la quantità cognita sia positiva, sarà $z^2 = \sqrt{a^4 \pm a^3 p} = a\sqrt{a^2 \pm ap}$, e facendo $\sqrt{a^2 \pm ap} = q$, sarà $z^2 = aq$, e $z = \sqrt{aq}$.

Per mezzo dell' addotto maneggio si troveranno i valori dell' incognita nell' equazione finale $y^8 = 4c^4 y^4 + 16c^8$ ottenuta nella soluzione del problema (§. 221).

CAPO V.

Si danno alcuni ripieghi principali per ottenere l' equazione finale di un preblema molto depressa.

250. Si è già veduto in più luoghi, che dalla maniera diversa di trattare la soluzione dello stesso problema nascono delle equazioni più, o meno composte, ed elevate

a

a gradi differenti; e ficcome una delle principali cure dell' Analifta confifter dee nell' induftriarfi per ottenere equazioni finali depreffe più che fia fattevole, così per accrefcere le notizie, che intereffano quefta materia, fi danno in queito capo alcuni principali ripieghi, che fi applicano immediatamente alla foluzione de' problemi.

Data la fomma $= a$ di tre grandezze in continua proporzione geometrica, e data la fomma dei loro quadrati $= c^2$, trovare effe tre grandezze.

Se la foluzione di quefto problema s'intraprenderà nella maniera, che fembra più ovvia, e naturale, coll' efprimere quefte grandezze a norma del §. 121, $\div p : pd : pd^2$, s' avranno le due feguenti equazioni primitive

$$1.^a \; p + pd + pd^2 = a$$

$$2.^{da} \; p^2 + p^2d^2 + p^2d^4 = c^2$$

Si trovi nella prima, come la più femplice, il valore di $p = \frac{a}{d^2+d+1}$, e quefto fi foftituifca nella feconda, s'avrà l'equazione finale di quarto grado affetta

$$2.^{da} \quad \frac{a^2+a^2d^2+a^2d^4}{d^4+2d^3+3d^2+2d+1} = c^2$$

la quale non si può risolvere colle cose insegnate.

Se in vece dell' addotta espressione canonica si userà quest' altra, in cui le tre grandezze ricercate costituiscono pure una proporzione continua $\div\!\!\div\; p : q : \frac{q^2}{p}$, s' avranno le due equazioni primitive.

1.ª $p + q + \frac{q^2}{p} = a$

2.da $p^2 + q^2 + \frac{q^4}{p^2} = c^2$, le quali, essendo più composte delle altre due, somministrano un' equazione finale assai più difficile a maneggiarsi dell' altra.

251. Il ripiego da usarsi per ottenere l' equazione finale del proposto problema (§. 250) molto depressa consiste nel distendere il canone senza badare, che le tre grandezze esser debbano in continua proporzione geometrica. E però sia
il primo termine $= p$
il secondo $= q$
sarà il terzo $= a - p - q$.

Ciò fatto, per adempiere la prima delle condizioni del problema, cioè che queste grandezze sieno continuamente proporzionali, si farà uso di una delle sue proprietà, e per esempio che il prodotto

degli estremi è uguale al quadrato di quella di mezzo (§. 125).

1.ª $p \times \overline{a-p-q} = q^2$, la qual cosa somministra nel tempo stesso una delle equazioni primitive del problema.

L' altra equazione primitiva si deduce immediatamente dalla seconda condizione espressa nel problema, cioè

2.da $p^2 + q^2 + \overline{a-p-q}^2 = c^2$

Due sono pertanto le incognite in queste due equazioni, cioè p, q.

Nella prima equazione si trovi il valore del primo termine $= p$, e sarà

1.ª $p = \frac{a-q}{2} + \sqrt{\frac{a^2-2aq-3q^2}{4}}$, sostituiscasi questo valore di p nell' espressione $a-p-q$, e s' avrà $\frac{a-q}{2} - \sqrt{\frac{a^2-2aq-3q^2}{4}}$ pel terzo termine.

Si quadrino questi valori del primo, e terzo termine, e sostituiscansi nella seconda equazione primitiva

2.da $p^2 + q^2 + \overline{a-p-q}^2 = c^2$, s' avrà

2.da $\frac{a^2-2aq-q^2}{2} + \overline{a-q}\sqrt{\frac{a^2-2aq-3q^2}{4}}$

$+ q^2 + \frac{a^2-2aq-q^2}{2} - \overline{a+q}\sqrt{\frac{a^2-2aq-3q^2}{4}} = c^2$;

e, corretta l'espressione, sarà $a^2 - 2aq = c^2$, equazione finale di primo grado, in cui

$q = \frac{a^2 - c^2}{2a}$, e sostituendo questo valore di q nella prima equazione.

1.ª $p = \frac{a-q}{2} + \sqrt{\frac{a^2 - 2aq - 3q^2}{4}}$, si farà cognito anche il valore del primo termine.

252. Trovare i quattro termini di una proporzione geometrica continua, de'quali sia cognita la somma $= a$ degli estremi, e l'altra dei due termini di mezzo $= c$.

Se i quattro termini ricercati si esprimeranno a tenore del §. 121. $\div\!\!: p:pd:pd^2:pd^3$, s'avranno le due equazioni primitive

1.ª $p + pd^3 = a$

2.da $pd + pd^2 = c$

e trovando in una di queste il valore di p, come il più semplice, e questo sostituito nell'altra equazione, s'avrà la finale di 3.° grado $ad + ad^2 = cd^3 + c$.

253. Il ripiego da praticarsi per ottenere più depressa l'equazione finale del problema antecedente consiste nell'esprimere i quattro termini continuamente proporzionali in quest'altra maniera $\div\!\!: p:q:\frac{q^2}{p}:\frac{q^3}{p^2}$, la quale somministra le due seguenti equazioni primitive

1.ª $p + \frac{q^3}{p^2} = a$

$2.^{da} q + \frac{q^2}{p} = c$

nella ſeconda di queſte equazioni, come la più ſemplice, ſi trovi il valore del primo termine $p = \frac{q^2}{c-q}$, e queſto ſoſtituiſcaſi nella prima equazione, s' avrà $\frac{q^2}{c-q}$ $+ \frac{q^3}{\frac{q^4}{(c-q)^2}} = a$, o ſia $\frac{q^2}{c-q} + \frac{c^2-2cq+q^2}{q} = a$, in cui facendo ſcomparire i rotti, e correggendo l' eſpreſſione, s' avrà l' equazione finale di 2.do grado $c^3 - 3c^2q + 3cq^2 = acq - aq^2$ da trattarſi nelle ſolite maniere, e trovato il valore di q, ſi ſoſtituirà nell'equazione di primo grado $p = \frac{q^2}{c-q}$ per avere il valore del primo termine.

Importa quì l' oſſervare, che l' eſpreſſione delle grandezze proporzionali, la quale in queſto paragrafo ſomminiſtra una equazione finale depreſſa uſata nel problema (§. 250), produce un effetto totalmente oppoſto.

Riuſcirà ancora più ſemplice la ſoluzione di queſto problema, ſe ſi farà uſo del corollario (§. 163): imperciocchè, chiamando $= x$ la differenza fralli due termini

estremi, ed $=y$ la differenza fralli termini medj, s' avrà la proporzione continua $\div\div \frac{a+x}{2} : \frac{c+y}{2} : \frac{c-y}{2} : \frac{a-x}{2}$, da cui si ricavano le tre seguenti equazioni primitive

1.ª $a^2 - x^2 = c^2 - y^2$

2.da $ac + cx - ay - xy = c^2 + 2cy + y^2$

3.ª $ac - cx + ay - xy = c^2 - 2cy + y^2$.

Si sottri la terza equazione dalla seconda, s' avrà $2cx - 2ay = 2cy$, e quindi $x = \frac{ay + cy}{c}$, e sostituito questo valore di x nella prima, s' avrà l' equazione semplice di secondo grado.

1.ª $a^2 - \frac{a^2y^2 - 2acy - c^2y^2}{c^2} = c^2 - y^2$.

254. Qualunque volta la soluzione del problema riesce molto difficile o per la parsimonia dei dati, o perchè le quantità sono scambievolmente molto intricate, in simili riscontri riesce utilissimo dividere il problema in due altri, combinati però in modo, che la soluzione del primo serva d' avviamento per risolvere facilmente il secondo (§. 215 n. 4). Del gran vantaggio, che si ricava da questo ripiego, se ne hanno molti esempj nella Geometria, ove s' incontrano di tanto in tanto dei Lemmi ideati a bella posta per agevo-

lare il maneggio della susseguente proposizione.

L'applicazione, che di questo ripiego si fa nella soluzione de' problemi (§. 255, e 259) darà lume bastante per valersene in quegli altri casi, ne' quali si usa il metodo analitico per risolvere i problemi.

255. Dato il semicerchio *FGHKL* col diametro *FL* prolungato fino in *T* tirare da questo punto una segante *TKG* tale, che l' arco *GHK* sia le due quinte parti della mezza circonferenza *FGHKL*. FIGURA XV.

Dall' esposto del problema si vede, che la proprietà delle due seganti (Euclide lib. 3. Propos. 36) è bensì necessaria alla soluzione del quesito, ma che questa proprietà non basta per ottenere l' addimandata ragione tra l' arco *GHK*, e la mezza circonferenza, e che prima di far uso della divisata proprietà convien conoscere il valore della corda *GK*. Per la qual cosa si potrà dividere il problema proposto ne' due seguenti.

1.° Trovare una corda *GK*, la quale nel dato semicerchio sia sottesa all' arco *GHK* uguale alle due quinte parti della mezza circonferenza *FGHKL*.

2.do Dal punto dato *T* preso nel diametro *FL* prolungato tirare nel dato semi-

cerchio una ſegante tale, che la parte intercetta *GK* ſia uguale a una retta data.

256. Per riſolvere il primo problema ſi rifletta che, dovendo l'arco *GHK* eſſere le due due quinte parti della mezza circonferenza *FGHKL*, ſarà eſſo arco di gradi 72. Dal centro *Q* del ſemicerchio ſi tirino i raggi *QG*, *QK*, i quali formino l'angolo *GQK* di gradi 72, ſaranno nel triangolo iſoſcele *GQK* noti i tre angoli, ed i due lati *QG*, *QK*, e quindi per la Trigonometria ſarà nota la corda *GK*.

Se ſi vuole preſcindere dalla Trigonometria baſterà compire il cerchio *FGHKLS*, e valendoſi della propoſizione 11. lib. 4. d'Euclide, vi ſi inſcriverà un pentagono equilatere, ed equiangolo, giacchè ognuno de'ſuoi lati, eſſendo ſotteſo all'arco di gradi 72, ſomminiſtra il valore della ricercata corda.

257. Trovato il valore della retta *GK*, ſi paſſerà alla ſoluzione del ſecondo problema (§. 255), valendoſi perciò della proprietà delle ſeganti eſpreſſa nella ſeguente equazione

$$FT \times LT = GT \times KT$$

Si distenda adunque il canone, e sia

$FL = 2a$

$LT = b$

$GK = c$

$KT = y$

sarà $FT = 2a + b$

$GT = c + y$

Sostituiscansi i valori analitici nella addotta proprietà delle seganti, e s' avrà $\overline{2a+b} \times b = \overline{c+y} \times y$, cioè $2ab + b^2 = cy + y^2$, equazione di secondo grado da trattarsi nel modo solito.

258. Dato il quadrato $ABCD$ col lato AB prolungato verso E, tirare una retta DE in modo, che la parte EF sia uguale al lato del quadrato. FIGURA XIX. TAVOLA II.

Suppongasi già tirata la DE coll'addimandata condizione, e si chiami $AB = EF = a$, $BE = x$, $BF = y$, sarà $AE = a + x$; e poichè l' angolo EBF è retto, s' avrà nel triangolo rettangolo EBF $\overline{FE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2$, e scrivendo i valori analitici, sarà $a^2 = x^2 + y^2$, 1.ª equazione.

Per avere l' altra equazione si rifletta, che sono simili i triangoli BFE, ADE, e però sarà $BF : BE :: AD : AE$, e sostituendo i valori analitici, e fatto il prodotto de' medj, e degli estremi, s'avrà la

ſeconda equazione $ax = \overline{a+x} \times y$, e quindi 2.[da] $\frac{ax}{a+x} = y$. Soſtituiſcaſi queſto valore di y nella prima equazione, s'avrà l'equazione finale $a^2 = x^2 + \frac{a^2x^2}{a^2+2ax+x^2}$ e facendo ſparire il rotto, e correggendo l'eſpreſſione, ſarà $a^4+2a^3x=a^2x^2=2ax^3+x^4$

Se in vece di cercare il valore di BE ſi cercherà quello di DE, s'avrà un'altra equazione finale.

Si continui a chiamare $AB = FE = a$, $DE = x$, $BF = y$, ſarà $DF = x - a$. Si conſideri ora, che, eſſendo BF parallela alla AD, s'avrà $DF : AB :: FE : BE$, o ſia in valori analitici $x-a : a :: a : \frac{a^2}{x-a} = BE$; e però nel triangolo rettangolo FBE ſarà $\overline{FE}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BE}^2$, o ſia $a^2 = y^2 + \frac{a^4}{x^2-2ax+a^2}$ 1.[a] equazione.

Dai triangoli ſimili ADE, BFE ſi ha $DE : AD :: FE : BF$, o ſia $x : a :: a : y$, e quindi $\frac{a^2}{x} = y$, e ſoſtituendo queſto valore di y nella prima equazione, ſi ha la finale $a^2 = \frac{a^4}{x^2} + \frac{a^4}{x^2-2ax+a^2}$, e facendo ſcomparire i rotti, ſi ha $x^4 - 2ax^3 - a^2x^2 + 2a^3x = a^4$.

Riuſcirà più ſemplice l'equazione finale, ſe, ſuppoſta diviſa pel mezzo in G l'intercetta FE, ſi cercherà il valore di DG. A tal fine ſi chiami $AD = EF = a$, ſarà $EG = FG = \frac{a}{2}$, e chiamando $DG = x$, ſarà $DE = x + \frac{a}{2}$, $DF = x - \frac{a}{2}$, e poſto $BF = y$, s'oſſervi; che dai triangoli ſimili ADE, BFE ſi ha $DE : FE :: AD : BF$, o ſia $x + \frac{a}{2} ; a :: a : y$, e quindi $\frac{a^2}{x + \frac{a}{2}} = y$. In oltre dagli ſteſſi triangoli ſi ha $DF : FE :: AB : BE$, o ſia $x - \frac{a}{2} : a :: a : \frac{a^2}{x - \frac{a}{2}} = BE$; e poichè nel triangolo rettangolo BFE ſi ha $\overline{FE}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BE}^2$, s'avrà in valori analitici $a^2 = y^2 + \frac{a^4}{x^2 - ax + \frac{a^2}{4}}$, e ſcrivendo in vece di y il ſuo valore, e correggendo l'eſpreſſione, s'avrà l'equazione finale del quarto grado derivativa del ſecondo

$$x^4 - \frac{5a^2x^2}{2} = \frac{7a^4}{16}$$

Finalmente ſe all'eſtremità E della ED ſi ſupporrà tirata la perpendicolare EK, la quale ſega in K il lato DC prolunga-

to, e si cercherà il valore di DK, l'equazione finale riuscirà ancora più semplice.

Tirata dal punto E la retta EL perpendicolare alla DK, saranno simili i triangoli KEL, FDC, KED. Si chiami $CD = FE = EL = a$, $DK = x$, $DF = KE = y$, sarà $DE = a + y$.

Nel triangolo rettangolo KED si ha $\overline{DK}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{KE}^2$, o sia $x^2 = a^2 + 2ay + y^2 + y^2 = a^2 + 2ay + 2y^2$ 1.ª equazione.

Dai triangoli simili DKE, DFC si ha $DE : DK :: DC : DF$, o sia $a + y : x :: a : y$, e quindi $ay + y^2 = ax$, e moltiplicando per 2 si ha $2ay + 2y^2 = 2ax$ nella prima equazione; sostituiscasi $2ax$ in vece di $2ay + 2y^2$, s'avrà l'equazione finale $x^2 = a^2 + 2ax$.

259. Data la somma $= a$ di quattro grandezze in continua proporzione geometrica, e data la somma de' loro quadrati $= c^2$, trovare esse quattro grandezze.

Se per trovare i termini ricercati si farà uso dell'espressione $\div\!\!\div p : q : \frac{q^2}{p} : \frac{q^3}{p^2}$, per mezzo della quale si è ottenuta una equazione finale di secondo grado (§. 253), s'avranno nel caso presente le due equazioni primitive molto elevate.

1.ª $p + q + \frac{q^3}{p} + \frac{q}{p^2} = a$

2.da $p^2 + q^2 + \frac{q^4}{p^2} + \frac{q^6}{p^4} = c^2$, e quindi l'equazione finale, che ne risulterà, ascenderà necessariamente a un grado sublime.

Se poi si userà l'espressione canonica $\div p : pd : pd^2 : pd^3$ (§. 121), s'avrà nelle primitive

1.ª $p + pd + pd^2 + pd^3 = a$

2.da $p^2 + p^2d^2 + p^2d^4 + p^2d^6 = c^2$ il primo termine $= p$ assai più depresso; onde l'equazione finale ascenderà bensì a grado minore dell'altra, ma sarà tutt'ora elevata al sesto grado.

Affine pertanto di ottenere una equazione finale più depressa, si divida il problema nei due seguenti (§. 254).

1.º Data la somma $= a$ di quattro termini in continua proporzione geometrica, e quella dei loro quadrati $= c^2$, trovare la somma dei due termini di mezzo.

2.do Trovare i quattro termini di una proporzione continua geometrica, de'quali sia data la somma dei due estremi, e quella dei due termini di mezzo.

Dall'esposizione del primo problema si vede, che quanto in esso ricercasi dee essere più semplice, e più facile a ritrovarsi,

che se si cercassero a dirittura i quattro termini, e si vede pure che, quando si sarà trovata la somma dei due termini di mezzo, il secondo problema sarà lo stesso, che si è già risolto (§. 253) con una equazione finale di secondo grado.

Oltre l' aver distinto il problema proposto in due particolari, è necessario ancora, per avere una equazione finale depressa, usare il ripiego descritto (§. 251), cioè distendere il canone senza badare, che i quattro termini esser debbono in continua proporzione geometrica. Ciò posto

260. Sia la somma de' quattro termini $= a$

Quella dei loro quadrati $= c^2$

La somma dei due termini di mezzo $= y$

Il primo termine $= p$

Il secondo $= q$

sarà il terzo $= y - q$

Il quarto $= a - p - y$

Per adempiere ora alla prima condizione del problema, cioè che i quattro termini sieno continuamente proporzionali, si faccia uso di una delle sue proprietà dimostrata (§. 125), cioè che il prodotto del primo nel terzo termine è uguale al quadrato del secondo, ed il prodotto del secondo nel quarto termine è uguale

al quadrato del terzo, col qual mezzo s'avranno le due ſeguenti equazioni primitive.

$1.^a \; p \times \overline{y - q} = q^2$

$2.^{da} \; q \times \overline{a - p - y} = \overline{y-q}^{\,2}$

Per avere poi la terza equazione primitiva baſta adempiere l' altra condizione del problema, cioè

$$3.^a \; p^2 + q^2 + \overline{y-q}^{\,2} + \overline{a-p-y}^{\,2} = c^2$$

Se queſte equazioni ſi maneggeranno colle ſolite regole per ridurle alla finale, queſta riuſcirà ancora molto compoſta; ma, ſe ſi uſerà il ripiego ſeguente, ſi otterrà una finale di ſecondo grado.

Dei quattro termini proporzionali ſe ne faccia il prodotto dei medj, e degli eſtremi, e s'avrà l' equazione

$ap - p^2 - py = qy - q^2$. Si divida queſt' equazione in due, ſupponendo ciaſcun membro uguale all' incognita x^2, e ſi avranno in tal guiſa le due equazioni ſegnate G, K.

$G \,.\, ap - p^2 - py = x^2$

$K \,.\, qy - q^2 = x^2$

Nell' equazione G ſi trovi il valore del primo termine $= p$, e ſarà

$$p = \frac{a-y}{2} + \sqrt{\frac{a^2 - 2ya + y^2 - x^2}{4}}$$

Sostituiscasi questo valore di p nell'espressione del quarto termine $a-p-y$, e sarà esso quarto termine

$a-\frac{a+y}{2}-\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2-x^2}{4}}-y$, e correggendo l' espressione, sarà il quarto termine $=\frac{a-y}{2}-\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2-x^2}{4}}$.

Si avranno adunque le seguenti espressioni del primo termine $=\frac{a-y}{2}+\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2-x^2}{4}}$

del quarto termine $=\frac{a-y}{2}-\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2-x^2}{4}}$

nelle quali le incognite p, q più non compaiono.

Nell'equazione K si trovi il valore del secondo termine $=q$, e sarà $q=\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x^2}$. Sostituiscasi questo valore nell' espressione del terzo termine $y-q$, s' avrà $y-\frac{y}{2}-\sqrt{\frac{y^2}{4}-x^2}$, e correggendo l' espressione, sarà il terzo termine $=\frac{y}{2}-\sqrt{\frac{y^2}{4}-x^2}$.

E però si avranno le seguenti espressioni del secondo termine $=\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{y^2}{4}-x^2}$

del

del terzo termine $= \frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} - x^2}$, nelle quali più non si vedono le incognite p, q.

Si quadri ora ciascheduno de' ritrovati termini per indi sommarli insieme, e sostituirli nella terza equazione primitiva, e sarà

$$\left.\begin{array}{l} p^2 = \frac{a^2-2ya+y^2}{2} - x^2 + \overline{a-y}\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2}{4} - x^2} \\ q^2 = \frac{y^2}{2} - x^2 + y\sqrt{\frac{y^2}{4} - x^2} \;.\;.\;.\;. \\ \overline{y-q}^2 = \frac{y^2}{2} - x^2 - y\sqrt{\frac{y^2}{4} - x^2} \;.\;.\;.\;. \\ \overline{a-p-y}^2 = \frac{a^2-2ya+y^2}{2} - x^2 - \overline{a+y}\sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2}{4} - x^2} \end{array}\right\} = c^2$$

e sommati questi quadrati insieme, e corretta l' espressione, si ha

$3.^a\ a^2 - 2ya + 2y^2 - 4x^2 = c^2$, e quindi

$$\frac{a^2 - 2ya + 2y^2 - c^2}{4} = x^2.$$

Sostituiscasi questo valore di x^2 nelle espressioni dei quattro termini, e s'avrà

$$1.^o = \frac{a-y}{2} + \sqrt{\frac{a^2-2ya+y^2}{4} - \frac{a^2+2ya-2y^2+c^2}{4}}$$

$$= \frac{a-y}{2} + \sqrt{\frac{c^2-y^2}{4}}$$

$$2.^{do} = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{a^2+2ya-2y^2+c^2}{4}} =$$

$$\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{-a^2+2ya-y^2+c^2}{4}}$$

$3.^{\circ} = \frac{y}{2} - \sqrt{\frac{-a^2 + 2ya - y^2 + c^2}{4}}$

$4.^{\circ} = \frac{a\ y}{2} - \sqrt{\frac{c^2 - y^2}{4}}$

Si sostituiscano questi valori nelle due equazioni primitive

$1.^a\ p \times \overline{y-q} = q^2$

$2.^{da}\ q \times \overline{a-p-y} = \overline{y-q}^2$

e per semplificarne il calcolo, suppongasi

$\sqrt{\frac{c^2 - y^2}{4}} = n$

$\sqrt{\frac{-a^2 + 2ya - y^2 + c^2}{4}} = m$

saranno essi termini

$1.^{\circ}\ \frac{a-y}{2} + n$

$2.^{do}\ \frac{y}{2} + m$

$3.^{\circ}\ \frac{y}{2} - m$

$4.^{\circ}\ \frac{a-y}{2} - n$, e quindi sarà

La prima equazione $\overline{\frac{a-y}{2} + n} \times \overline{\frac{y}{2} - m}$

$= \overline{\frac{y}{2} + m}^2$

o sia

$1.^a\ \frac{ay-y^2}{4} + \frac{yn+ym-am}{2} - m\,n = \frac{y^2}{4} + ym + m^2$

La 2.da equazione $\overline{\frac{y}{2}+m}\times\overline{\frac{a-y}{2}-n}=\overline{\frac{y}{2}-m}^{2}$

o sia

2.da $\frac{ay-y^2}{4}-\frac{yn-ym+am}{2}-mn=\frac{y}{4}-ym+m^2$

e, sottratta questa dalla prima, si ha $yn+ym-am=2ym$, e, corretta l'espressione, rimane

$yn=ym+am$

Si scrivano in quest' equazione i valori radicali in vece delle lettere m, n, e s' avrà

$$y\sqrt{\frac{c^2-y^2}{4}}=\overline{y+a}\sqrt{\frac{-a^2+2ya-y^2+c^2}{4}}$$

se ne quadri ciascun membro, e si corregga indi l'espressione, e sarà

$c^2y^2-y^4=-a^4+2y^2a^2-y^4+a^2c^2+2ac^2y+c^2y^2$, e corretta di nuovo l'espressione, e dividendo per a, sarà

$a^3=2ay^2+ac^2+2c^2y$, equazione finale di secondo grado, in cui trovato il valore di y, che è la somma dei due termini di mezzo, e questo sottratto dalla somma $=a$ de' quattro termini, s' avrà nell'avanzo la somma dei due estremi, col qual mezzo si risolverà il secondo problema (§. 259) per mezzo di una equazione finale pure di secondo grado (§. 253).

Riuſcirà aſſai più ſemplice la ſoluzione del problema, e ſenza dimezzarlo in due, ſe ſi farà uſo del Corollario (§. 163) nel diſtendere il canone.

Si chiami $= y$ la ſomma dei due termini di mezzo, ſarà quella de' due eſtremi $= a - y$.

Sia la differenza fra queſti eſtremi $= x$, e ſia $= z$ quella fra i termini medj, ſarà

Primo termine $= \frac{a-y+x}{2}$

2.do . . . $= \frac{y+z}{2}$

3.o . . . $= \frac{y-z}{2}$

4.o . . . $= \frac{a-y-x}{2}$, i quali a mente della prima condizione del problema formano la proporzione continua geometrica $\div \frac{a-y+x}{2} : \frac{y+z}{2} : \frac{y-z}{2} : \frac{a-y-x}{2}$, dalla quale ſi ricavano le tre ſeguenti equazioni primitive

1.a $a^2 - 2ay + y^2 - x^2 = y^2 - z^2$, o ſia
1.a $a^2 - 2ay - x^2 = - z^2$

2.da $ay - y^2 + xy - az + yz - xz = y^2 + 2yz + z^2$

3.a $ay - y^2 - xy + az - yz - xz = y^2 - 2yz + z^2$.

Si ſottri la terza equazione dalla ſeconda,

e si corregga l'espressione dell'avanzo, s' avrà 4.ª $xy = az + yz$, e quindi $\frac{xy}{a+y} = z$.

Nella 1.ª, e 4.ª equazione s'avranno le tre incognite x, y, z; affine pertanto di avere un' altra equazione, in cui si trovino esse tre incognite, s' adempisca l' altra condizione del problema, cioè che la somma dei quadrati dei quattro termini sia uguale c^2, e s' avrà, corretta l'espressione. 5.ª $a^2 - 2ay + 2y^2 + x^2 + z^2 = 2c^2$, in cui, se si sostituirà il valore di $z^2 = x^2 + 2ay - a^2$ dedotto dalla prima, s'avrà, corretta l' espressione, 5.ª $x^2 = c^2 - y^2$.

Nella 4.ª equazione s'elevi ciascun membro al quadrato, e sostituito il valore di $z^2 = x^2 + 2ay - a^2$, s' avrà 4.ª $\frac{x^2y^2}{a^2 + 2ay + y^2} = x^2 + 2ay - a^2$, e correggendo l'espressione, sarà 4.ª$a^4 - 3a^2y^2 - 2ay^3 = \overline{a^2 + 2ay} \times x^2$. Sostituiscasi in questa il valore di x^2 dedotto dalla 5.ª, e si corregga l' espressione, s' avrà l' equazione finale di secondo grado 4.ª $a^4 - 2a^2y^2 = a^2c^2 + 2ac^2y$ da trattarsi nel modo solito.

PARTE TERZA

Delle Progreſſioni.

261. Si denomina *Progreſſione* qualſivoglia proporzione continua, la quale ha più di quattro termini. Se queſta proporzione ſarà aritmetica, la progreſſione ſi chiamerà *Aritmetica*, e ſi dirà *Geometrica* la progreſſione, ſe tale ſarà la proporzione continua.

Da queſta definizione conſegue, che la teoria ſpiegata nel Capo 5. della prima parte intorno le proporzioni continue conviene preciſamente alle progreſſioni, di cui ſi tratta, e ne ſomminiſtra i fondamenti.

CAPO I.

Delle Progreſſioni Aritmetiche.

262. Le progreſſioni aritmetiche creſcenti, e le decreſcenti poſſono principiare da qualſivoglia numero, ed eziandio dal zero, ed eſtenderſi all'infinito con un eſponente qualunque, come ſi può oſſervare nei ſeguenti eſempj.

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . ec.
÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . ec.
÷ 4 . 9 . 14 . 19 . 24 . 29 . 34 . ec.
÷ 20 . 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2 . ec.
÷ 53 . 46 . 39 . 32 . 25 . 18 . 11 . ec.

Si dee quì notare, che nelle progreſſioni decreſcenti può ſvanire uno de' ſuoi termini, e riuſcire uguale al zero, mentre gli altri ſucceſſivi diventano negativi, come ſi vede in queſt' eſempio.

÷ 20 . 16 . 12 . 8 . 4 . 0 . — 4 . — 8 . — 12 . ec.

Altre volte poi i termini paſſano dal poſitivo al negativo, ſenza che il zero ſia compreſo fra eſſi; come

÷ 15 . 8 . 1 . — 6 . — 13 . — 20 ec.

263. Preſa la proporzione continua (§. 113) ÷ $p . p \pm d . p \pm 2d . p \pm 3d$, e accreſcendo in eſſa il numero de' termini a beneplacito, ſi ha la ſeguente progreſſione aritmetica eſpreſſa in una maniera generaliſſima.

÷ $p . p \pm d . p \pm 2d . p \pm 3d . p \pm 4d . p \pm 5d . p \pm 6d$. ec.

Un breve eſame fatto intorno queſta eſpreſſione canonica baſta per dedurne i ſeguenti teoremi.

264. In qualſivoglia progreſſione aritmetica

1.° Preſi due termini qualſivoglia la loro ſomma uguaglia quella di due altri ter-

mini ugualmente distanti dai due presi. Per esempio la somma del primo termine p, e del sesto $p \pm 5d$ uguaglia la somma del secondo $p \pm d$, e del quinto $p \pm 4d$, ed uguaglia pure la somma del terzo $p \pm 2d$, e del quarto $p \pm 3d$, giacchè ciascheduna di esse somme si esprime per $2p \pm 5d$.

2.do Se i termini della prtgressione sono dispari, la somma dei due estremi uguaglia pure quella di due intermedj equidistanti dai primi, ed uguaglia anche il doppio del termine di mezzo. Per esempio, se la progressione ha sette termini, la somma del primo, ed ultimo dà $2p \pm 6d$, e s' ottiene lo stesso valore sommando il secondo, e sesto termine, il terzo, ed il quinto, e duplicando il quarto termine, che è appunto quello di mezzo.

3.° Qualunque sia il numero de' termini constituenti la progressione, l'ultimo termine è sempre uguale al primo più, o meno l' esponente moltiplicato pel numero de' termini meno uno, vale a dire che, se la progressione ha cinque termini, l'ultimo si esprime per $p \pm 4d$, se la progressione ha sei termini, l' ultimo s' esprime per $p \pm 5d$, e così di altri; e però chiamando $= n$, il numero de' termini, e l'ultimo termine $= u$, s'avrà $u = p \pm \overline{n-1} \times d$.

265. Giacchè la somma del primo, ed ultimo termine uguaglia quella di due termini equidistanti da questi, ed anche il doppio del termine di mezzo (§. 264 n. 1, e 2), consegue, che, se la somma del primo, ed ultimo termine si moltiplica per la metà del numero de' termini, nel prodotto si ha la somma di tutti i termini della progressione.

Se la somma suddetta sia $= s$, sarà $s = \overline{p + u} \times \frac{n}{2}$, 1.ª Formola, e se in vece di u si scriverà il suo valore $p \pm \overline{n-1} \times d$, sarà $s = \overline{2p \pm \overline{n - 1} \times d} \times \frac{n}{2} = np \pm \frac{n^2 - n}{2} \times d$, 2.da Formola.

Si risolvono i Problemi appartenenti alle Progressioni Aritmetiche.

266. Le formole date (§. 264, 265) servono per risolvere i problemi, di cui si tratta. Esse contengono cinque quantità, cioè il primo termine, l' esponente, l' ultimo termine, il numero de' termini, e la somma di tutti i termini. E però, venendo dall' esposto del problema cognite tre di queste quantità, basterà sostituirle nelle formole per venire in cognizione delle

altre, come ſi vedrà ne' ſeguenti eſempj.

267. Per ſette giorni conſecutivi ſono diſertati parecchi Soldati dalla Fortezza nemica. Nel primo giorno ne ſono diſertati 8, e ne' giorni ſucceſſivi il numero de' diſertori è andato creſcendo ugualmente in ciaſcun giorno, di maniera che la diſerzione nel ſettimo giorno è ſtata di 26 uomini. Cercaſi quanti Soldati ſono diſertati in ciaſchedun giorno.

Dall' eſpoſto del problema ſi comprende facilmente, che le diſerzioni cotidiane formano una progreſſione aritmetica creſcente, in cui, eſſendo dato il primo termine $= 8$, l' ultimo termine $= 26$, il numero de' termini $= 7$, ſi cerca il denominatore. E però, ſe queſti dati ſi ſoſtituiranno nella formola $u = p \pm \overline{n-1} \times d$ (§. 264), e ſi prenderà poſitiva la quantità $\overline{n-1} \times d$, ſtantechè la progreſſione è creſcente, s'avrà $26 = 8 + 6d$, e quindi $d = 3$, col qual mezzo ſi formerà la progreſſione ſeguente, i cui termini dimoſtrano la diſerzione cotidiana.

$\div$ 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26.

Se col mezzo dei diviſati dati ſi cercaſſe anche la ſomma della progreſſione, baſterebbe ſoſtituirli nella prima formola del §. 165, e s' avrebbe

$s = \overline{8 + 26} \times \frac{7}{2} = 119.$

268. Un Negoziante ha pigliato a imprestito da un Usurajo una certa somma, e si è obbligato di pagare ll. 5 in fine del primo mese, ll. 7 in fine del 2.do, e così crescendo colla stessa legge ne' mesi successivi. Nell' ultimo mese il negoziante ha pagato ll. 23 d' interesse. Cercasi quanti mesi abbia tardato a restituire la somma presa ad imprestito, e quanto abbia pagato d' interesse.

Dall' esposto del problema si vede, che della progressione aritmerica crescente si cerca il numero de' termini, e la somma, essendo noti l' esponente, il primo, e l' ultimo termine.

Nella formola $u = p \pm \overline{n-1} \times d$ sostituituiscansi i dati del problema, e si prenda positivo il termine $\overline{n-1} \times d$, stantechè la progressione è crescente, s' avrà

$23 = 5 + \overline{n-1} \times 2$, e quindi $n = 10$.

Sostituiscasi il valore di n nella formola

$s = \overline{p + u} \times \frac{n}{2}$, e s' avrà

$s = \overline{5 + 23} \times 5 = 140.$

269. Un Ortolano, avendo preso un orto in affitto per sei anni, ne ha ricavato di frutto nel primo anno ll. 70, nel

ſecondo ha ricavato ll. 8 di meno, nel terzo anno ha pure ricavato ll. 8 di meno del ſecondo di maniera, che il frutto di ciaſchedun anno è ſempre ſcemato di ll. 8. Cercaſi quanto abbia conſeguito nell' ultimo anno, e quale ſia il denaro ricavato in tutto il tempo dell' affittamento.

Dall' eſpoſto del problema ſi vede, che della progreſſione decreſcente ſi cerca l'ultimo termine, e la ſomma, eſſendo dati l' eſponente, il primo termine, ed il numero de' termini.

Soſtituiſcanſi i dati nella formola
$u = p - \overline{n-1} \times d$, prendendo negativo il termine $\overline{n-1} \times d$, a cagione che la progreſſione è decreſcente, e s' avrà
$u = 70 - 5 \times 8 = 30$.

Soſtituiſcaſi queſto valore di u nella formola $s = \overline{p + u} \times \frac{n}{2}$, s' avrà
$s = \overline{70 + 30} \times 3 = 300$.

270. Un Comandante di fanteria vuol penetrare colla baionetta in canna nella linea dell' Avverſario. A tal fine vuol diſporre i ſuoi ſoldati in forma di un cuneo ſpuntato formato con dieci righe di fanti, la prima delle quali ſia di 24 uomini, la ſeconda di 30, la terza di 36, e così

fusseguentemente coll'accrescere sempre sei soldati nella riga successiva. Cercasi il numero de' soldati necessarj per eseguire questa disposizione.

Dall' esposto del problema si vede, che si cerca la somma della progressione crescente, essendo dati il primo termine, l'esponente, ed il numero de' termini.

Siccome in questo caso è ignoto l'ultimo termine, così si farà uso della seconda formola (§. 265) $s = np \pm \frac{n^2 - n}{2} \times d$, prendendo positivo il termine $\frac{n^2 - n}{2} \times d$, stantechè la progressione è crescente, e s' avrà

$$s = 10 \times 24 + \frac{100 - 10}{2} \times 6 = 510.$$

271. L' acqua di un fonte si scarica da otto canali. Il secondo canale somministra in un' ora brente $2 \frac{1}{2}$ di meno del primo, il terzo ne somministra $2 \frac{1}{2}$ di meno del secondo, e così progredendo colla stessa diminuzione si fa, che l' ottavo somministra soltanto 6 brente. Cercasi quante brente d' acqua sgorgano in un' ora dagli otto canali.

Siccome per l' esposto del problema s'incontrano nelle formole (§. 265) due incognite, cioè p, ed s, così fa di mestiere valersi prima della formola (§. 264 n. 3) $u = p \pm \overline{n-1} \times d$, affine di trovare il valore di p, pigliando a tal fine negativo il termine $\overline{n-1} \times d$, stantechè la progressione è decrescente.

Sostituendo adunque i numeri in questa formola, si ha $6 = p - 7 \times 2 \frac{1}{2}$, e quindi $p = 23 \frac{1}{2}$.

Il ritrovato valore di p sostituiscasi nella formola $s = \overline{p+u} \times \frac{n}{2}$, s' avrà

$s = \overline{23\frac{1}{2} + 6} \times 4 = 118$.

272. Allorchè si lascia rotolare una palla A lungo un piano inclinato BC, la medesima si muove con legge tale, che nel secondo minuto scorre piedi 4 di più, che nel primo, nel terzo minuto scorre piedi 4 di più del secondo, e così crescendo il suo movimento di piedi 4 in ciaschedun minuto, arriva nell' ultimo a scorrere piedi 46. Cercasi quanti minuti impiegherà la palla nel rotolare da B in C per l' estensione di piedi 288.

FIGURA XVI.

Confrontando l' eſpoſto del problema colle due formole $u = p \pm \overline{n-1} \times d$, $s = \overline{p+u} \times \frac{n}{2}$, ſi vede, che le incognite p, ed n, eſſendo in ambedue le formole, ſi debbono conſiderare come due equazioni primitive, che convien ridurre in una finale col fare ſcomparire una delle incognite.

Soſtituiſcanſi pertanto i dati nelle due formole, e s'avrà

1.ª $46 = p \pm \overline{n-1} \times 4$

2.ᵈᵃ $288 = \overline{p+46} \times \frac{n}{2}$. Nella prima formola ſi faccia ſcomparire p, prendendo poſitivo il termine $\overline{n-1} \times 4$, ſtantechè la progreſſione è creſcente, e s'avrà $46 - \overline{n-1} \times 4 = p$; ſoſtituiſcaſi queſto valore di p nella ſeconda formola, e ſarà

$$288 = \overline{46 - \overline{n-1} \times 4 + 46} \times \frac{n}{2} = 48n - 2n^2,$$

equazione affetta di ſecondo grado, che trattata colle ſolite regole dà $n = 12$, e quindi $p = 2$.

Costruire la Tavola, mediante la quale si determina il numero delle palle disposte in pila.

273. Le palle da cannone, le bombe, e le granate Reali sogliono negli Arsenali essere disposte in pile. Alcune di queste hanno un triangolo equilatere per base, altre un quadrato, altre un quadrilungo, altre un pentagono, o un esagono regolare ec.

Le formole per determinare il numero delle palle contenute in ciascheduna di queste pile si costruiscono per mezzo della dottrina detta *dei numeri figurati, poligoni, e piramidali.* Questa dottrina è fondata sulla natura, e proprietà delle progressioni aritmetiche; ma perchè il trattare questa teoria in tutte le sue diramazioni ci allontanerebbe dal nostro oggetto, così ne addurremo tanto che basta per costruire una tavola, mediante la quale si determina il numero delle palle contenute nelle pile quadrate, e nelle lunghe, cioè che hanno la base quadrata, o quadrilunga, e sono quelle, di cui si fa un maggior uso dagli Artiglieri.

274. Allorchè si considera una pila quadrata, si vede

1.° Che

1.° Che ciaſcheduna delle ſue quattro facciate, come *ABC*, *ACD*, preſenta un triangolo equilatere formato da diverſe ſile orizzontali di palle, e che, principiando dalla cima *A*, le palle contenute in ciaſcheduna filà ſucceſſiva formano la progreſſione aritmetica de' numeri naturali, e che col continuo raccogliere i termini di queſta progreſſione ſi ha il numero delle palle contenute nel triangolo. FIGURA XVII.

Queſti numeri così raccolti chiamanſi *Poligoni*, ed in iſpezie *Numeri triangolari*.

2.[do] Che ciaſcheduna delle diviſate file orizzontali è il lato di uno ſtrato quadrato di palle, e che queſti ſtrati ſovrapposti gli uni agli altri formano la pila quadrata, di modo che ſe, cominciando dalla cima *A*, ſi raccoglieranno ſucceſſivamente i quadrati dei numeri naturali, s' avrà la ſomma delle palle contenute nella pila. Queſti numeri così raccolti chiamanſi *Numeri Piramidali*.

275. Per formare la tavola, di cui ſi tratta, ſi ſcrivono in una colonna a mano ſiniſtra i numeri naturali, e queſti ſi raccolgono ſucceſſivamente, e ſe ne ſcrive la ſomma nella colonna de' numeri triangolari corriſpondentemente al numero naturale (§. 274 n. 1). Sommando 1 con 2

ſi ha 3 per lo triangolare, che corriſponde al naturale 2, ſommando il triangolare 3 col naturale 3 ſi ha il triangolare 6 corriſpondente al naturale 3, ſommando il triangolare 6 col naturale 4 ſi ha il triangolare 10 corriſpondente al naturale 4, e così ſuſſeguentemente, come ſi oſſerva nella ſeguente tavola, che ſi può accreſcere a beneplacito.

Nella terza colonna ſi ſcrivono i quadrati corriſpondentemente ai loro numeri naturali, indi ſi raccolgono ſucceſſivamente, incominciando dall' unità (§. 274 n. 2), e così ſommando il quadrato di 1 col quadrato di 2, che è 4, ſi ha 5 pel numero piramidale, o ſia pel numero delle palle contenute in una pila, che ha due palle in un ſuo lato, ſommando 5 col quadrato di 3, che è 9, ſi ha 14 per la quantità delle palle contenute in una pila, che ne ha tre in un ſuo lato, ſommando 14 col quadrato di 4, che è 16, ſi ha 30 pel numero delle palle contenute in una pila, che ne ha quattro in un ſuo lato, e così di ſeguito.

Tavola per le Pile quadrate.

Numeri Naturali.	Triangolari.	Quadrati.	Piramidali.
1	1	1	1
2	3	4	5
3	6	9	14
4	10	16	30
5	15	25	55
6	21	36	91
7	28	49	140
8	36	64	204
9	45	81	285
10	55	100	385
			ec.

Si dee quì notare che, dopo d' aver registrato i numeri piramidali fin al ſegno, che ſi deſidera, più non ſono neceſſarj i numeri quadrati, in vece che i triangolari ſervono ancora per coſtruire la tavola delle pile lunghe.

276. Se ſi eſamina il coſtrutto di una pila lunga *ADGKBCFHL*, ſi vede, che eſſa è compoſta della pila quadrata *ABCD*, e di diverſe facciate triangolari *EF*, *GH*, *KL* appoggiate le une alle altre, e quindi che il numero delle palle eſiſtenti nelle pile lunghe è compoſto da quelle, che FIGURA XVIII.

formano la pila quadrata, e dalle altre, che sono nelle dette facciate. Per la qual cosa, se ai numeri piramidali s' aggiugneranno successivamente una, due, tre volte ec. i corrispondenti triangolari, s'avranno in queste somme le palle contenute nelle pile lunghe.

Nella tavola per le pile quadrate si scriva a destra *Facciate*, e sotto questa categoria si noti il numero corrispondente a ciascheduna facciata, cioè 1.ª, 2.da, 3.ª, 4.ª, 5.ª, ec. Ciò premesso, per avere i numeri da registrarsi nella colonna della prima facciata, si sommi il piramidale 1 col triangolare 1, e s' avrà 2 da registrarsi in questa 1.ª colonna corrispondentemente alle dette due unità. Si sommi il piramidale 5 col triangolare 3, e la somma 8 si scriva nella detta colonna 1.ª in corrispondenza d' essi numeri 5, e 3. Si sommi il piramidale 14 col triangolare 6, e s' avrà 20 da registrarsi in detta colonna 1.ª in corrispondenza d' essi due numeri 14, e 6, e continuando a operare nella stessa maniera, s' avranno gli altri numeri 40, 70, 112, 168, 240, 330, 440 ec. da registrarsi nella colonna 1.ª

Per avere i numeri da registrarsi nella colonna della 2.da facciata, si sommi il

numero 2 registrato nella 1.ª colonna col triangolare corrispondente 1, e s'avrà 3, che si scriverà nella colonna 2.da in corrispondenza de' numeri 2, 1. Si sommi 8 della 1.ª colonna col triangolare 3, e la somma 11 si registri nella colonna 2.da in corrispondenza d'essi due numeri. Si sommi 20 della prima colonna col triangolare 6, e si registri 26 in corrispondenza d'essi due numeri, e proseguendo a così fare, s'avranno gli altri numeri 50, 85, 133 ec. d'essa 2.da colonna.

Operando nella stessa maniera si avranno i numeri da registrarsi nella 3.ª, 4.ª, 5.ª ec. colonna, come si ricava facilmente dalla seguente tavola, che si può estendere a beneplacito.

Tavola per numerare le palle disposte in Pile quadrate, e lunghe.

Numeri.			Facciate.			
Naturali.	Triangolari.	Piramidali.	1.ª	2.da	3.ª	4.ª ec.
1	1	1	2	3	4	5
2	3	5	8	11	14	17
3	6	14	20	26	32	38
4	10	30	40	50	60	70
5	15	55	70	85	100	115
6	21	91	112	133	154	175
7	28	140	168	196	224	252
8	36	204	240	276	312	348
9	45	285	330	375	420	465
10	55	385	440	495	550	605

277. L'uso di questa tavola è semplicissimo: imperciocchè, se si tratta di determinare le palle esistenti in una pila quadrata, basta contare quelle, che sono in uno de' suoi lati *AB*, o pure *BC*, e supposto per esempio che questo numero sia 7, si osserverà, che al numero naturale 7 corrisponde 140 nella colonna dei piramidali; onde si dirà, che in quella pila quadrata esistono 140 palle.

Se si tratterà di determinare le palle FIGURA XVIII.
esistenti in una pila lunga, si conteranno le palle da B in A, che si troveranno essere per esempio 9, indi si conteranno da D verso K quelle, che additano il numero delle facciate appoggiate alla pila quadrata, e supposto che sieno 4, si osserverà nella tavola, che al numero naturale 9 corrisponde 465 nella colonna della quarta facciata, onde si dirà, che in quella pila lunga esistono 465 palle, e così di altri casi.

CAPO II.

Delle Progressioni Geometriche.

278. Se in una proporzione continua geometrica s'accrescerà il numero de'termini, s'avrà una progressione geometrica, la quale si potrà continuare a beneplacito, come si osserva negli esempj seguenti, ne' quali si vede, che la progressione può principiare da qualsivoglia numero intero, o rotto.

$\div\!\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 ec.

$\div\!\div$ 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 ec.

$\div\!\div$ $\frac{1}{16}$: $\frac{1}{4}$: 1 : 4 : 16 : 64 : 256 ec.

Se in queste progressioni crescenti si invertirà l'ordine de' termini, s'avranno altrettante progressioni decrescenti, che si potranno estendere a piacimento senza mai arrivare al zero, se non se dopo un numero infinito di termini.

$$\div 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} \text{ ec.}$$

$$\div 729 : 243 : 81 : 27 : 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} \text{ ec.}$$

$$\div 256 : 64 : 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \frac{1}{64} : \frac{1}{256} : \frac{1}{1024} \text{ ec.}$$

279. Se nella proporzione continua geometrica (§. 121) $\div p : pd : pd^2 : pd^3$ s'accrescerà il numero de' termini, s'avrà la seguente espressione generalissima per qualsivoglia progressione geometrica crescente, e decrescente.

$\div p : pd : pd^2 : pd^3 : pd^4 : pd^5 : pd^6$ ec.

Coll' esaminare la formazione di questa formola canonica, si dedurranno facilmente i seguenti teoremi.

280. In qualsivoglia progressione geometrica

1.° Presi a beneplacito due termini, il loro prodotto uguaglia quello di due altri termini equidistanti dai due primi: per esempio il prodotto del primo p nel sesto pd^5 uguaglia il prodotto del secondo pd

nel quinto pd^4, ed uguaglia pure il prodotto del terzo pd^2 nel quarto pd^3, poichè tutti essi prodotti si esprimono per p^2d^5.

2.do Se i termini presi sono di numero dispari, il loro prodotto sarà pure uguale a quello di due altri termini equidistanti dai primi, e sarà pure uguale al quadrato del termine di mezzo. Per esempio, pigliando il primo termine p, ed il settimo pd^6, si ha il prodotto p^2d^6 uguale al prodotto del secondo pd nel sesto pd^5, a quello del terzo pd^2 nel quinto pd^4, ed uguale al quadrato del termine di mezzo pd^3.

3.° Qualunque sia il numero de' termini costituenti la progressione, l'ultimo termine è sempre espresso dal prodotto del primo nel denominatore della progressione elevato a una potestà indicata dal numero de' termini meno uno; e così, se la progressione ha cinque termini, l'ultimo termine s' esprime per pd^4, se la progressione ha sei termini, l'ultimo s'esprime per pd^5, e generalmente, se il numero de' termini sia $= n$, e l'ultimo termine si chiami $= u$, sarà $u = pd^{n-1}$.

281. Giacchè la progressione geometrica è una proporzione continua, consegue, che ciascun termine, fuori dell' ultimo, potrà essere antecedente, e ciascun termi-

ne, fuori del primo, potrà essere conseguente; e però il primo termine starà al secondo, come la somma degli antecedenti stà alla somma de' conseguenti (Euclide libro 5. Prop. 12), e invertendo starà il secondo al primo, come la somma de'conseguenti a quella degli antecedenti, e dividendo starà il secondo, meno il primo, al primo, come tutti i conseguenti, meno tutti gli antecedenti, o dicasi, corretta l'espressione, come l'ultimo, meno il primo, stà alla somma de' termini, che precedono l'ultimo, cioè

$$pd - p : p :: u - p : \frac{p \times \overline{u-p}}{pd-p}$$

somma de'termini, che precedono l'ultimo; se a questa somma s' aggiugne l'ultimo termine, si ha la somma $= s$ di tutti i termini, che costituiscono la progressione, cioè $s = \frac{pu-p^2}{pd-p} + u = \frac{ud-p}{d-1}$ prima formola.

Se in questa prima formola si scriverà in vece di u il suo valore pd^{n-1} (§.280 n. 3) s' avrà $s = \frac{pd^n - p}{d-1}$ seconda formola.

282. Se nella progressione decrescente si suppone, che il numero de' termini si estenda all'infinito, l'ultimo termine riu-

ſcirà in queſto caſo infinitamente picciolo riſpetto agli altri; onde ſenza errore ſenſibile ſi potrà conſiderare uguale al zero, e quindi nella formola 1.ª $s = \frac{ud-p}{d-1}$ ſi può ſcancellare il termine ud, ed allora la formola ſuddetta diventa $s = \frac{-p}{d-1}$; e ſerve appunto per le progreſſioni decreſcenti all' infinito; dovendoſi oſſervare, che la ſomma s rieſce ſempre una quantità poſitiva, giacchè, eſſendo l' eſponente d un rotto minore dell' unità, il numeratore, ed il denominatore del rotto hanno ambidue il ſegno meno, e quindi ſomminiſtrano un quoziente poſitivo; onde la formola ſi può ſcrivere in queſt' altra maniera $s = \frac{p}{1-d}$.

Si riſolvono i problemi appartenenti alle progreſſioni Geometriche.

283. Le formole date (§. 280, 281, 282) ſervono per riſolvere i problemi, di cui ſi tratta. Eſſe contengono pure cinque quantità (§. 266), cioè il primo termine, il denominatore, l' ultimo termine, il numero de' termini, e la ſomma di tutti i termini. Per la qual coſa, eſſendo dall'eſpo-

ſto del problema cognite tre di queſte quantità, baſterà ſoſtituirle nelle formole per venire in cognizione delle altre, come ſi oſſerverà ne' ſeguenti eſempj.

284. Un Profeſſore s' aſſume di educare un giovine per dieci anni continui, e pattuiſce, che nel primo anno ſe gli darà una doppia, due nel ſecondo anno, quattro nel terzo, otto nel quarto ec., col duplicare ſempre nell'anno ſuſſeguente la ſomma dell' anno antecedente. Cercaſi quanto dovrà ricevere nell' ultimo anno, e quale ſia la ſomma, che avrà a conſeguire per li dieci anni.

Dall' eſpoſto del problema ſi vede, che della progreſſione geometrica ſi cerca l'ultimo termine, e la ſomma, eſſendo dato il primo termine $= 1$, il denominatore $= 2$, ed il numero de' termini $= 10$.

Per avere l' ultimo termine, ſoſtituiſcanſi i dati nella formola $u = pd^{n-1}$ (§. 280 n. 3), e s' avrà $u = 1 \times 2^{10-1} = 512$. Col ſoſtituire poi queſto valore dell' ultimo termine nella prima formola (§. 281) $s = \frac{ud-p}{d-1}$, ſi avrà $s = \frac{512 \times 2 - 1}{2-1} = 1023$ pel totale numero delle doppie, che conſeguir dee il Profeſſore.

Se nella formola ſi fosſe addimandato a dirittura la ſomma totale, ſi ſarebbe fatto uſo della ſeconda formola (§. 281)

$$s = \frac{pd^n - p}{d-1} = \frac{2^{10}-1}{1} = 1023.$$

285. Un Trafficante ha guadagnato in parecchi anni ll. 2548, nel primo anno ha guadagnato ll. 7., ed eſſendoſi negli anni ſucceſſivi accreſciuto il ſuo guadagno ſempre nella ſteſſa proporzione, ha avuto ll. 1701. di profitto nell' ultimo anno. Cercaſi il guadagno fatto in ciaſchedun anno.

Dall' eſpoſto del problema ſi vede che, eſſendo data la ſomma della progreſſione geometrica, il primo, e l' ultimo termine, ſe ne cerca il denominatore. Nella formola $s = \frac{ud-p}{d-1}$ ſoſtituiſcanſi i dati del problema, e s'avrà $2548 = \frac{1701d-7}{d-1}$, e quindi $2548d - 2548 = 1701d - 7$, e $847d = 2541$, onde $d = \frac{2541}{847} = 3$.

Inſtituiſcaſi pertanto la progreſſione, e s' avrà pel guadagno di cadun anno.

$\div\!\div$ 7 : 21 : 63 : 189 : 567 : 1701.

286. Se nell' avanti ſcritto problema in vece della ſomma foſſe dato il numero de' termini, converrebbe ſervirſi della formola

$u = pd^{n-1}$, in cui, ſostituendo i dati, s' otterrebbe una equazione pura del grado indicato da $n - 1$.

Ove poi in vece dell' ultimo termine foſſe data la ſomma, il primo termine, ed il numero de' termini, converrebbe ſervirſi della formola $s = \frac{pd^n - p}{d-1}$, in cui, ſoſtituendo i dati, s' incontra un' equazione del grado indicato dal numero de' termini, ed affetta in modo, che non ſi può riſolvere colle coſe fin quì inſegnate.

287. Si è fatto un riparo nelle ripe di un fiume per ſette anni ſucceſſivi, di modo che nel primo anno eſſendoſi fatta una ſpeſa conſiderabile, nel ſecondo anno ſi è ſpeſo ſolamente le due quinte parti dell' anno antecedente, nel terzo anno ſi è ſpeſo pure le due quinte parti di ciò eraſi ſpeſo nel ſecondo anno, di maniera che, avendo la ſpeſa ſempre diminuito in quella ragione, ſi ſono ſpeſe nel ſettimo anno ſolamente ll. 512. Cercaſi quale ſia la ſpeſa fatta nel primo anno, e quanto ſiaſi ſpeſo in tutto.

Dall' eſpoſto del problema ſi vede, che la progreſſione è decreſcente col denominatore $\frac{2}{5}$, e che, avendoſi l' ultimo ter-

mine, ed il numero de' termini, si cerca il primo termine, e la somma.

Si cominci a trovare il primo termine col sostituire i dati nella formola $u = pd^{n-1}$, e s' avrà $512 = p \times \overline{\left|\frac{2}{5}\right.}^{6} = \frac{64}{15625} p$, e quindi $p = \frac{512 \times 15625}{64} = 125000$.

Sostituiscasi questo valore del primo termine nella formola $s = \frac{ud-p}{d-1}$, s' avrà

$$s = \frac{512 \times \frac{2}{5} - 125000}{\frac{2}{5} - 1} = 207992.$$

288. Un tesoriere ha sborsato ll. 33670 in diversi pagamenti. Nel primo pagamento ha sborsato ll. 10240, nel secondo ha sborsato i tre quarti del primo pagamento, nel terzo sborso ha pagato i tre quarti del secondo sborso, ed avendo continuato a fare altri pagamenti, ne' quali il susseguente era i tre quarti della somma antecedente, cercasi quale sia il numero de' pagamenti fatti, e quale la somma sborsata nell' ultimo di essi.

Essendo dall' esposto del problema data la somma della progressione, il primo termine, ed il denominatore $\frac{3}{4}$, convien pri-

ma d' ogni cosa trovare l' ultimo termine per mezzo della formola $s = \frac{ud-p}{d-1}$, giacchè in questa non comparisce l' incognita $= n$. Sostituiscansi adunque i dati nella formola, e s' avrà $33670 = \frac{\frac{3}{4}u - 10240}{\frac{3}{4} - 1}$, ed operando si trova $u = 2430$.

Se questo valore si sostituirà nella formola $u = pd^{n-1}$, s'avrà $2430 = 10240 \times \overline{\left|\frac{3}{4}\right.}^{n-1}$, ove, essendo l' incognita n nell' esponente, non se ne può trovare il valore colle fin quì date regole: del che se ne tratterà nel capo seguente, dopo che si sarà data la teoria de' Logaritmi.

I Computisti sogliono risolvere questi problemi col mezzo di una operazione da essi detta a *Scaletta*, trovando successivamente varj termini colla cognizione del primo termine, e del denominatore, finchè arrivano ad averne tanti, che sommati insieme somministrano la detta somma. Nel caso nostro prendendo le tre quarte parti di 10240 si ha il secondo termine 7680, le tre quarte parti di questo somministrano 5760 pel terzo termine, e così operando

rando ſ' arriva a formare la ſeguente progreſſione di ſei termini, la ſomma de' quali uguaglia le lire 33670.

10240
7680
5760
4320
3240
2430

33670

289. Zenone Filoſofo antico propoſe il ſeguente argomento ſoffiſtico, per cui pretendeva, che poſta una Tartaruga in diſtanza di una lega da Achille, e ſuppoſto, che Achille camminaſſe dieci volte più preſto della Tartaruga, meſſi l' uno, e l' altra in movimento nel medeſimo tempo, non potrebbe Achille raggiugnere giammai la Tartaruga, poichè diceva egli, mentre Achille fa la prima lega, la Tartaruga ne fa un decimo della ſeconda, e, mentre Achille fa un decimo della ſeconda, la Tartaruga fa un decimo di queſto decimo, e così in infinito ſenza mai raggiugnere la Tartaruga.

Siccome tutti queſti decimi formano la ſeguente progreſſione decreſcente all' infinito ∺ $1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{10000}$ ec., così per conoſcere la falſità dell' argomen-

to baſta trovarne la ſomma, e queſta ſarà il cammino, che dee fare Achille per raggiugnere la Tartaruga. Soſtituendo pertanto nella formola $s = \frac{p}{1-d}$ (§.282) i dati del problema, ſarà $s = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$, vale a dire che Achille raggiugnerà la Tartaruga, dopo che avrà ſcorſa la prima lega, ed una nona parte della ſeconda lega.

290. Si fa uſo delle progreſſioni geometriche decreſcenti all' infinito per riſolvere anche varj altri problemi. Per eſempio ſi ſa, che una palla cacciata da un pezzo d'Artiglieria contro un gran terrapieno vi s'inoltra fino a un certo ſegno ſolamente; avvegnachè la continua reſiſtenza, che la medeſima incontra nel terrapieno, ſminuiſce in ciaſcheduno inſtante il ſuo inoltramento. Ciò premeſſo, ſe ſi ſuppone, che la palla penetri piedi 4 nel primo inſtante, e che in ciaſcheduno degli inſtanti ſucceſſivi il ſuo inoltramento ſia ſolamente $\frac{3}{5}$ dell' antecedente, e ſi voglia conoſcere quanto la palla penetri nel terrapieno, baſta nella formola (§.282) $s = \frac{p}{1-d}$ ſoſtituire i dati del problema,

cioè $p = 4$, $d = \frac{3}{5}$, e s' avrà $s = \frac{4}{1 - \frac{3}{5}}$ $= \frac{20}{2} =$ 10 piedi per la totale immersione.

Dell' uso più esteso delle Progressioni Geometriche.

291. Allorchè si esamina più minutamente l' espressione canonica delle progressioni geometriche
$\div\!\!: p : pd : pd^2 : pd^3 : pd^4 : pd^5 : pd^6 : pd^7 : pd^8 : pd^9 : pd^{10}$ ec.
se ne deducono facilmente varj altri teoremi, e per esempio

1.° Presi due termini qualsivoglia di una progressione, se si divide il più composto pel più semplice, il quoziente, che ne risulta, è sempre il denominatore della progressione elevato alla potestà indicata dal numero, che esprime di quanti termini il dividendo sia distante dal divisore. Se si divide pd^4 per pd, il quoziente sarà $= d^3$, il cui esponente 3 è uguale al numero de' termini, per cui pd^4 è distante da pd; se si divide pd^{10} per pd^6, il quoziente sarà $= d^4$, il cui esponente 4 è uguale al numero de' termini, per cui pd^{10} è distante da pd^6.

2.do Se in una progressione se ne sommano i termini due a due, cioè il primo col secondo, il terzo col quarto, il quinto col sesto ec., queste somme formano una progressione composta

$\div\!\div\; p + pd : pd^2 + pd^3 : pd^4 + pd^5 : pd^6 + pd^7$ ec.

Per provarlo, basta osservare, che il prodotto del primo termine $p + pd$ nel terzo $pd^4 + pd^5$ è uguale al quadrato del secondo termine $pd^2 + pd^3$, che il prodotto del secondo termine $pd^2 + pd^3$ nel quarto $pd^6 + pd^7$ è uguale al quadrato del terzo termine $pd^4 + pd^5$, e così di altri.

In oltre, se in questa nuova progressione composta si divide il secondo termine pel primo, o pure il terzo pel secondo, il quoziente $= d^2$ è il quadrato del denominatore della progressione semplice.

3.° Si otterrà pure una progressione composta, se in vece di sommare il primo termine col secondo, il terzo col quarto ec. si principierà a sommare il secondo col terzo, il quarto col quinto, il sesto col settimo ec., e di questa progressione il denominatore sarà pure $= d^2$, cioè il quadrato del denominatore della progressione semplice.

4.° Medesimamente se di una progressione si sommeranno i termini tre a tre

successivamente, principiando da quello, che più piace, si otterrà pure un' altra progressione composta, il cui denominatore sarà $= d^3$, cioè il cubo del denominatore della progressione semplice. Così ancora, se i termini di una progressione si sommeranno quattro a quattro, s' avrà un' altra progressione composta, il cui denominatore $= d^4$ sarà la quarta potestà del denominatore della progressione semplice. Se i termini della progressione semplice si sommeranno cinque a cinque, s' avrà pure un' altra progressione composta, il cui denominatore sarà $= d^5$, e così successivamente: potendosi dimostrare tutti questi teoremi nel modo istesso, che si è usato quì sopra al n. 2.

Applichiamo questa dottrina alla soluzione d' alcuni problemi.

292. Data la somma dei due primi termini $= 20$ di una proporzione geometrica, e data la somma del settimo, ed ottavo termine $= 14580$, trovare il sesto termine.

Per mezzo delle cose già insegnate intorno le progressioni si scorge facilmente, che per avere il sesto termine convien prima trovare il denominatore della progressione, ed il primo termine. Riflettendo

poi al modo di fare questa scoperta, si vede, che il problema è uno di quelli, in cui non si può già cercare immediatamente ciò, che si desidera, ma fa di mestieri trovare prima un' altra quantità conducente alla soluzione del quesito, ed è necessario in oltre dividere il problema in due (§. 215 n. 4).

Affine di conoscere, come debba essere diviso il problema proposto, convien riflettere, che tra il secondo, ed il settimo termine della progressione proposta se ne incontrano altri quattro, i quali, essendo pure sommati due a due, somministrano la progressione composta.

$\div\!\!\div\; p + pd : pd^2 + pd^3 : pd^4 + pd^5 : pd^6 + pd^7$ (§. 290 n. 2).

Ciò posto si scorge, che il problema proposto si dee dividere ne' due seguenti.

1.° Conoscendo il modo, con cui una progressione composta è formata, ed essendo di questa dato il primo termine $= 20$, ed il quarto $= 14580$, trovare il denominatore, ed il primo termine della progressione semplice.

2.do Cognito il primo termine, ed il denominatore di una progressione semplice, trovare il sesto termine.

Per risolvere il primo problema basta riflettere, che dividendo il quarto termine 14580 pel primo 20, il quoziente 729 è il cubo del denominatore di questa progressione composta (§. 291 n. 1), e quindi la sua radice = 9 somministra esso denominatore; ma perchè questa progressione composta è nata dalla somma dei termini della semplice presi due a due, così il denominatore 9 dee essere il quadrato del denominatore della progressione semplice (§. 291 n. 2), e quindi sarà = 3 il denominatore ricercato.

Per avere il primo termine della progressione semplice, instituiscasi l' equazione $p + pd = 20$, nella quale scrivendo in vece di d il suo valore = 3, si ha $p + 3p = 20$,

e $p = \frac{20}{4} = 5$.

Per risolvere poi il secondo problema, basta nella formola $u = pd^{n-1}$ sostituire il dato $n = 6$, ed i ritrovati $p = 5$, $d = 3$, e s' avrà $u = 5 \times 3^{6-1} = 243 \times 5 = 1215$ valore del sesto termine.

293. Di una progressione geometrica di dodici termini si conosce la somma del secondo, terzo, e quarto termine = 1240, e quella dell' ottavo, nono, e decimo termine = 19375000, si cerca la somma di tutti i termini.

Essendo questo problema della medesima natura dell' antecedente, basterà per risolverlo fare delle riflessioni analoghe, considerando fralle altre cose, che tra il quarto e l' ottavo termine della progressione semplice ve ne sono tre; onde la composta è formata dai termini della semplice presi tre a tre. Ciò premesso si dividerà il problema ne' due seguenti.

1.° Conoscendo il modo, con cui una progressione composta è formata, ed essendo di questa noto il primo termine = 1240, ed il terzo = 19375000, trovare il denominatore, ed il primo termine della progressione semplice.

2.do Cognito il primo termine, il denominatore di una progressione semplice, ed il numero de' termini = 12, trovare la somma di tutti i termini.

Per risolvere il primo problema convien riflettere che, dividendo il terzo termine 19375000 pel primo 1240, il quoziente 15625 è il quadrato del denominatore composto (§. 291 n. 1), e quindi la sua radice = 125 somministra esso denominatore: ma perchè questa progressione composta è nata dalla somma dei termini della semplice presi tre a tre, così il denominatore composto 125 sarà il cubo

del denominatore ſemplice $=5$ (§. 291 n. 4).

Per avere poi il primo termine della progreſſione ſemplice, baſterà inſtituire l' equazione col ſecondo, terzo, e quarto termine, cioè $pd + pd^2 + pd^3 = 1240$, e ſcrivendo in queſta il valore di $d = 5$, ſarà $5p + 25p + 125p = 1240$, e quindi $p = \frac{1240}{155} = 8$.

Si riſolverà poi il ſecondo problema col ſoſtituire nella formola $s = \frac{pd^n - p}{d - 1}$ il dato $n = 12$, ed i ritrovati $p = 8$, $d = 5$.

294. Di una progreſſione geometrica di 15 termini è data la ſomma del terzo, quarto, decimoterzo, e decimoquarto termine $= 73800$, ed è pure data la differenza tra la ſomma del terzo, e quarto, e quella del decimoterzo, e decimoquarto $= 73656$, trovare l' ultimo termine, e la ſomma di tutti i termini.

Queſto problema ha tre parti, e quindi ſi dee ſuddividere nei tre ſeguenti problemi, eſſendo i due ultimi della natura medeſima di quelli già riſolti ne' due precedenti paragrafi.

1.° Data la ſomma $= 73800$ di due numeri, e data la loro differenza $= 73656$, trovare eſſi due numeri.

2.do Conoſcendo il modo, con cui una progreſſione compoſta è formata, ed eſſendo in queſta noto il primo termine, ed il ſeſto, trovare il denominatore, ed il primo termine della progreſſione ſemplice.

3.° Cognito il primo termine, il denominatore, ed il numero de' termini di una progreſſione, trovare l'ultimo termine, e la ſomma di tutti i termini.

Per riſolvere il primo di queſti problemi ſi farà uſo del Corollario (§. 163), cioè la metà della ſomma, più la metà della differenza ſomminiſtra il numero maggiore = 73728, e la metà della ſomma meno la metà della differenza dà il numero minore = 72.

Con queſti dati ſi paſſerà a riſolvere il ſecondo problema, conſiderando, che tra il quarto termine della progreſſione ſemplice, ed il decimoterzo ſe ne incontrano otto, e che, eſſendo preſi due a due, s' ottiene una progreſſione compoſta, che ha ſei termini; per la qual coſa, dividendo il ſeſto termine 73728 di queſta progreſſione pel primo 72, il quoziente 1024 ſarà la quinta poteſtà del denominatore compoſto (§. 291 n. 1), e quindi la ſua radice quinta = 4 ſarà il denominatore

composto; ma perchè la progressione composta è formata dalla somma dei termini della semplice presi due a due, così esso denominatore composto 4 sarà il quadrato del denominatore semplice (§. 291 n. 2), e questo sarà $= 2$.

Per avere ora il primo termine della progressione semplice, s' instituisca l' equazione col terzo, e quarto termine, cioè $pd^2 + pd^3 = 72$, e scrivendo il valore di $d = 2$, sarà $4p + 8p = 72$, e quindi $p = 6$.

Per ultimo col sostituire nelle formole $u = pd^{n-1}$, $s = \frac{ud-p}{d-1}$ il dato $n = 15$, ed i valori ritrovati $p = 6$, $d = 2$, si risolverà il terzo problema, e s' avrà il valore dell' ultimo termine, e la somma di tutti i termini.

295. Dalla dottrina addotta in quest' articolo si ricavano alcune altre riflessioni molto interessanti, e per esempio

1.ª Se le soluzioni addotte ne' tre precedenti paragrafi si confrontano con quella del §. 286, qualora si cerca il denominatore per mezzo della formola $s = \frac{pd^n - p}{d-1}$, si vede, che con questa formola l' equazione riesce di un grado indicato dal nu-

mero de' termini, è affetta in modo, che non si può risolvere colle cose insegnate, in vece che nelle soluzioni del presente articolo l'equazione riesce sempre pura, e più depressa.

2.da Giacchè in ciascun grado evvi un problema generalissimo, cui tutti gli altri particolari del medesimo grado si riducono, e che nei problemi di grado superiore al secondo esso problema generalissimo si riduce a trovare fra due date grandezze due, tre, o quattro ec. proporzionali di mezzo (§. 177), e che questi si risolvono col mezzo di una equazione pura, così si scorge che, se l' Analista procurerà con qualche ripiego di ridurre il proposto problema particolare al suo generalissimo, arriverà a risolverlo con maggior facilità, e semplicità.

3.a Se i ripieghi dati in diversi luoghi della seconda Parte, e specialmente nel capo 5. si combineranno colla presente dottrina, s' otterranno in molti riscontri delle equazioni più semplici, e più depresse.

4.a Finalmente si avvisa che, qualora nelle Scienze Fisico-Meccaniche si fanno delle sperienze per determinare la legge di un qualche movimento difforme, si ar-

riva col mezzo della presente dottrina a risolvere il problema con facilità.

Costruire le formole per li problemi del Merito, e dello Sconto.

296. I problemi, di cui si tratta, potendosi ridurre a formole generali, cominceremo a costruire quella per li problemi del merito, deducendo questa costruzione dalla soluzione del problema.

Un Usuraio ha dato ad imprestito un capitale $= c$ per quattro anni con patto però, che spirato il tempo suddetto se li bonifichi l' interesse annuo nella ragione di cento al tanto per cento $= d$, e ha pattuito in oltre, che l'interesse dovutogli in fine di ciascun anno faccia capitale per l' anno seguente, onde venga ad esigere interesse d' interesse. Spirato il tempo suddetto si trova, che il capitale imprestato da principio è accresciuto della somma $= a$; costruire la formola generale.

Il capitale $= c$ imprestato dee nel fine del primo anno essere accresciuto nella ragione convenuta $= d$, onde esso capitale in fine del primo anno, e principio del secondo sarà $c + cd$. Questo credito dell' Usuraio dee nel fine del secondo anno,

e principio del terzo essere pure accresciuto nella ragione suddetta; onde sarà $c + cd + cd + cd^2 = c + 2cd + cd^2$. Nel fine del terzo anno, e principio del quarto verrà pure accresciuto come prima, onde sarà $c + 2cd + cd^2 + cd + 2cd^2 + cd^3 = c + 3cd + 3cd^2 + cd^3$. Nel fine del quarto anno sarà pure esso credito accresciuto nella detta ragione; onde sarà $c + 3cd + 3cd^2 + cd^3 + cd + 3cd^2 + 3cd^3 + cd^4 = c + 4cd + 6cd^2 + 4cd^3 + cd^4$. E però a mente del problema dovrà esso credito essere uguale al primo capitale accresciuto dell' aumento pattuito $= a$; perciò s'avrà l'equazione $c + 4cd + 6cd^2 + 4cd^3 + cd^4 = c + a$, in cui si contengono tutte le condizioni del problema.

Volendo ora ridurre quest' equazione a formola generale, convien osservare, che i crediti dell' Usuraio in fine di ciaschedun anno sono come segue

In fine del primo anno $c + cd = c \times \overline{1 + d}$

In fine del secondo anno $c + 2cd + cd^2 = c \times \overline{1 + d}^2$

In fine del terzo anno $c + 3cd + 3cd^2 + cd^3 = c \times \overline{1 + d}^3$

In fine del quarto anno $c + 4cd + 6cd^2 + 4cd^3 + cd^4 = c \times \overline{1 + d}^4$,

vale a dire che questi crediti sono espressi

pel primo capitale moltiplicato per $1 + d$ elevato alla potestà indicata dal numero degli anni: per la qual cosa, se il numero degli anni si esprimerà per n, avremo $c \times \overline{1+d}^n = c + a$, formola generalissima per questa specie di problemi, in cui si vede che, qualora si cerca il capitale $= c$, o l' accrescimento $= a$, il problema è sempre del primo grado. Se poi si cerca la ragione $= d$ dell' interesse annuo, il problema riesce del grado indicato dal numero $= n$ degli anni; e se si cerca il numero degli anni, converrà fare un computo a scaletta (§. 288), o pure servirsi dei logaritmi, come si vedrà nel capo seguente.

297. Per far vedere l' uso della formola come sovra ritrovata,

sia $c = 1000000$ lire

$d = \frac{1}{20}$, vale a dire che per ogni cento lire se ne debba pagare cinque d' interesse, e sia $a = 215506\frac{1}{4}$ lire,

ed $n = 4$.

Se nella formola si sostituiranno i valori di c, d, n, sarà $1 + d = \frac{21}{20}$, e quindi $1000000 \times \overline{\frac{21}{20}}^4 = 1000000 + a$, o sia,

elevando il rotto $\frac{21}{20}$ alla quarta poteſtà, $1000000 \times \frac{194481}{160000} = 1215506 \frac{1}{4} = 1000000 + a$, e quindi $1215506 \frac{1}{4} - 1000000 = 215506 \frac{1}{4} = a$.

Se nella formola ſi ſoſtituirà il valore di a, d, n, s'avrà il valore di c, e ſe ſi ſoſtituiranno i valori di c, a, n, ſi troverà, che l'equazione è di quarto grado, cioè $\overline{1+d}^4 = \frac{1000000+215506\frac{1}{4}}{1000000} = \frac{4862025}{4000000}$ ed eſtratta la radice quadrata da ciaſcun membro, ſarà $\overline{1+d}^2 = \frac{2205}{2000} = \frac{441}{400}$, ed eſtratta di nuovo la radice quadrata, ſarà $1+d = \frac{21}{20}$, e quindi $d = \frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$

298. Per coſtruire la formola per li problemi dello Sconto ſi opererà come ſegue

Un Cavaliere, volendo viaggiare, prende ad impreſtito per tre anni una ſomma $= c$ con obbligo di pagarne l'intereſſe annuo alla ragione di cento al tanto per cento $= d$. Egli vuole aſſegnare al ſuo creditore una rendita annua $= r$, per cui ſi paghino i detti intereſſi, e ſcontando

col

col di più una parte del capitale, trovi esso Cavaliere estinto il suo debito nel ripatriarsi dopo i tre anni.

Essendo il capitale preso ad impreſtito $= c$, il debito del Cavaliere in fine del primo anno sarà $c + cd$, e dopo d' aver scontato colla rendita assegnata, sarà $c + cd - r$ il suo debito in principio del secondo anno.

Nel fine del secondo anno il debito del Cavaliere sarà $c + cd - r + cd + cd^2 - dr$ $= c + 2cd + cd^2 - r - dr$, e dopo d'avere scontato il debito colla rendita assegnata, rimarrà in principio del terzo anno $c + 2cd + cd^2 - r - dr - r = c + 2cd$ $+ cd^2 - 2r - dr$.

Nel fine del terzo anno il debito sarà $c + 2cd + cd^2 - 2r - dr + cd + 2cd^2 + cd^3$ $- 2dr - d^2r = c + 3cd + 3cd^2 + cd^3 - 2r - 3dr$ $- d^2r$, e scontando colla rendita assegnata, succederà, che in fine di questo tempo verrà esattamente estinto il debito, onde si avrà $c + 3cd + 3cd^2 + cd^3 - 2r$ $- 3dr - d^2r = o$, e però $c + 3cd + 3cd^2$ $+ cd^3 = 3r + 3dr + d^2r$ sarà l' equazione, che contiene tutte le condizioni del problema.

Per convertire quest' equazione in una formola generale, converrà esprimerla in

queſt' altra maniera $c \times \overline{1+3d+3d^2+d^3}$, o ſia $c \times \overline{1+d}^3 = r \times \overline{3+3d+d^2}$, ma il ſecondo membro è uguale a queſt' altra eſpreſſione $r \times \frac{\overline{1+d}^3 - r}{d}$, come facilmente ſi può dimoſtrare, facendone il confronto, così ſi ſcorge come in ambedue i membri dell' equazione vi ſia la poteſtà di $1+d$ indicata dal numero degli anni; e ſiccome ſi trova ſempre la ſteſſa coſa per qualſivoglia numero d'anni, così chiamando queſto numero $= n$, avremo la formola generaliſſima per li problemi di queſta ſpecie $c \times \overline{1+d}^n = r \times \frac{\overline{1+d}^n - r}{d}$.

Una breve rifleſſione fatta ſu queſta formola baſta per conoſcere che, qualora ſi cerca il capitale, o la rendita, il problema è ſempre del primo grado, che, qualora ſi cerca la ragione $= d$ del cento al tanto per cento, il problema rieſce di un grado indicato dal numero degli anni; e ſe ſi cerca il numero degli anni, converrà fare un conto a ſcaletta, o valerſi dei Logaritmi.

299. Per applicare i numeri alla formola, ſia $c = 331000$, $d = \frac{1}{10}$, $r = 133100$, e ſia $n = 3$, ſe in quella ſi ſoſtituirà il

capitale, la ragione, ed il numero degli anni, sarà

$$331000 \times \overline{\tfrac{11}{10}}^{3} = r \times \frac{\overline{\tfrac{11}{10}}^{3} - r}{\tfrac{1}{10}}, \text{ o sia}$$

$$331000 \times \frac{1331}{1000} = 440561 = r \times \frac{\frac{1331}{1000} - r}{\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{3310r}{1000},$$

e quindi $\frac{440561000}{3310} = 133100 = r$.

Se sarà noto c, r, ed n, s' avrà

$$331000 \times \overline{1+3d+3d^2+d^3}$$
$$= \frac{133100 \times \overline{1+3d+3d^2+d^3} - 133100}{d},$$

e facendo scomparire il rotto, sarà

$$331000 \times \overline{d+3d^2+3d^3+d^4}$$
$$= 133100 \times \overline{1+3d+3d^2+d^3} - 133100,$$

equazione di quarto grado con tutti i suoi termini, che non si può risolvere colle cose fin quì spiegate.

CAPO III.

De' Logaritmi.

300. Chiamanſi *Logaritmi* gli eſponenti di una progreſſione geometrica qualſivoglia. Se la progreſſione ſarà creſcente, come $∺\ a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5$ ec., gli eſponenti $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ſaranno i logaritmi poſitivi della propoſta progreſſione, cioè ſarà zero il logaritmo di a^0, ſarà 1 il logaritmo di a^1, 2 il logaritmo del terzo termine della progreſſione, e così ſucceſſivamente.

Se la progreſſione ſarà decreſcente, come $∺\ a^0 : a^{-1} : a^{-2} : a^{-3}$ ec., gli eſponenti $0, -1, -2, -3$ ec. ſaranno i logaritmi negativi d'eſſa progreſſione, la quale corriſponde preciſamente a queſt' altra eſpreſſione $∺\ a^0 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^3}$ ec. (§.22, 23).

301. Dalle date definizioni conſegue, che la teoria ſpiegata nella prima parte pel calcolo degli eſponenti delle poteſtà ſerve preciſamente per quello de' logaritmi, vale a dire che pel mezzo di queſti ſi può moltiplicare, dividere, innalzare numeri a poteſtà, ed eſtrarne la radice.

X

Per addurne alcuni eſempj, abbiaſi la ſeguente progreſſione geometrica aſcendente a deſtra dell' unità, e diſcendente a ſiniſtra, e ſopra ciaſcuno de' ſuoi termini ſia ſcritto il corriſpondente eſponente della poteſtà

$$-7 . -6 . -5 . -4 . -3 . -2 . -1 . 0$$

$$\frac{1}{128} : \frac{1}{64} : \frac{1}{32} : \frac{1}{16} : \frac{1}{8} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1$$

$$0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 \text{ ec.}$$

$$1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 \text{ ec.}$$

Si oſſervi ora, che ſommando il logaritmo 2 col logaritmo 6 ſi ha il logaritmo 8, che nella progreſſione geometrica creſcente corriſponde a 256 prodotto di 4 per 64. Se il logaritmo 5 ſi ſottra dal logaritmo 9, nell' avanzo 4 ſi ha il logaritmo di 16 quoziente, che s'ottiene nel dividere 512 per 32. Se ſi triplica il logaritmo -2, ſi ha il logaritmo -6, che corriſponde al rotto $\frac{1}{64}$, che è il cubo di $\frac{1}{4}$. Se del logaritmo -6 ſi prende la metà, ſi ha il logaritmo -3, che corriſponde al rotto $\frac{1}{8}$, che è la radice quadrata di $\frac{1}{64}$, e così di altri.

302. Quantunque negli addotti esempj i logaritmi della progressione geometrica formino la serie de' numeri naturali, nulla di meno si può in vece di questa scrivere una qualsivoglia altra progressione aritmetica, come osservasi nelle colonne verticali *B*, *C*, *D*, *F*, ognuna delle quali somministra i logaritmi dei termini corrispondenti alla stessa progressione geometrica registrata nella colonna verticale *A*. Dovendosi però avvertire, che, dopo d'aver scelta una progressione aritmetica per la sede de' logaritmi, non è poi più lecito di variarla.

A		B	C	D	F
1	0	3	10	47	$2\frac{3}{5}$
2	1	8	14	54	$3\frac{2}{5}$
4	2	13	18	61	$4\frac{1}{5}$
8	3	18	22	68	5
16	4	23	26	75	$5\frac{4}{5}$
32	5	28	30	82	$6\frac{3}{5}$
64	6	33	34	89	$7\frac{2}{5}$

303. Sebbene ſia arbitrario di prendere qualſivoglia progreſſione aritmetica per li logaritmi di una progreſſione geometrica, ciò non oſtante, conſiderando i Matematici la facilità, che per mezzo di quelli s' ottiene in molte operazioni aritmetiche (§. 301), hanno ſtabilito di comun conſenſo ſervirſi della ſerie de' numeri naturali, che principia dal zero, ed in corriſpondenza d' eſſa ſerie hanno pure fiſſata la ſeguente progreſſione geometrica.

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 ec. di modo che, essendo zero il logaritmo di 1, si ha poi 1 pel logaritmo di 10, 2 pel logaritmo di 100, 3 pel logaritmo di 1000, 4 pel logaritmo di 10000 ec.

Costruire la Tavola de' Logaritmi.

304. Alle tavole de' seni stampate in diversi libri va unita per l' ordinario quella de' Logaritmi corrispondenti ai numeri naturali, principiando dall' unità fino a 10000.

Per costruire questa tavola convien osservare, che i logaritmi 0, 1, 2, 3, 4 registrati nell' antecedente paragrafo servono solamente per gli numeri naturali della progressione geometrica 1, 10, 100, 1000, 10000; onde fa di mestiere trovare i logaritmi dei numeri intermedj fra 1, e 10, fra 10, e 100, fra 100, e 1000, fra 1000, e 10000. A tal fine si prendano questi numeri in modo, che sieno medj proporzionali nella detta progressione geometrica, ed a questi medj si scrivano corrispondentemente i loro logaritmi, i quali per necessità riusciranno altrettanti medj proporzionali aritmetici; ma siccome in queste operazioni si hanno degli avanzi, che non si possono trascurare senza

errore notabile, così converrà renderli inſenſibili colla loro picciolezza, facendo a tal fine le operazioni ſuddette coll' aggiugnere ſette zero tanto a' termini della progreſſione geometrica, quanto a quelli della progreſſione aritmetica, ciò premeſſo

Per trovare il logaritmo di 2, che è il primo numero frappoſto tra 1, e 10 della progreſſione geometrica, ſi trovi un proporzionale di mezzo tra 1.0000000, e 10.0000000, e ſarà 3.1622777, il cui logaritmo ſarà 0.5000000, che è la metà della ſomma del logaritmo di 1, e di 10. Ora, ſiccome il 2 numero naturale, che ſi vuole inſerire nella progreſſione geometrica, è fra 1, e 3.1622777, così cerchiſi fra queſti due numeri un medio proporzionale, e s' avrà il numero naturale geometrico 1.7782794, il cui logaritmo ſarà 0.2500000, cioè la metà della ſomma del logaritmo di 1, e di 3.1622777; ma perchè il numero 2 geometrico, che ricercaſi, è tra 1.7782794, e 3.1622777, così ſi trovi fra queſti due numeri un proporzionale di mezzo geometrico, e ſarà 2.3713737, il cui logaritmo 0.3750000 è la metà della ſomma dei due logaritmi 0.2500000, 0.5000000 corriſpondenti ai numeri geometrici 1.7782794,

e 3.1622777. Col procedere ſucceſſivamente nell' iſteſſo modo a trovare altri medj proporzionali geometrici, ed i ſuoi corriſpondenti logaritmi, s'arriverà dopo ventiquattro operazioni ad avere il ricercato numero 2.0000004. col ſuo corriſpondente logaritmo 0.3010301, in cui, non facendo conto dell' ultima cifra 4, ſi ha il numero 2 da interporſi nella progreſſione geometrica tra 1, e 10, il cui logaritmo è 0.3010301.

Collo ſteſſo artifizio ſi troveranno gli altri numeri primi, che ſono tra 1, e 10, tra 10, e 100, tra 100, e 1000, tra 1000, e 10000.

305. Quanto poi ai numeri compoſti, baſta ſommare i logaritmi dei numeri componenti; e così per avere il logaritmo del numero naturale geometrico 4, baſterà duplicare il logaritmo di 2, e s'avrà 0.6020602 pel logaritmo di 4, col duplicare il logaritmo di 4, s' avrà il logaritmo di 16, col duplicare queſto logaritmo, s'avrà quello di 256 ec.

Se ſi ſommerà il logaritmo di 2 con quello di 3, s' avrà il logaritmo di 6, col ſommare il logaritmo di 6 con quello di 2, s'avrà il logaritmo di 12, e s' avrà queſt' iſteſſo logaritmo col ſom-

mare il logaritmo di 3 con quello di 4.

Se si duplicherà il logaritmo di 3, s'avrà quello di 9, e se si triplicherà il logaritmo di 3, s'avrà quello di 27, e così di altri.

Si noti, che i logaritmi sono numeri relativi, in vece che sono assoluti i numeri naturali geometrici corrispondenti ai detti logaritmi.

La cifra scritta a sinistra di un logaritmo, e separata con un punto dalle rimanenti si chiama *Caratteristica*.

306. Ciò, che detto è per trovare i logaritmi de' numeri assoluti, si dee applicare precisamente per trovare il logaritmo di qualsivoglia seno dato, o della corrispondente tangente dell' arco ec. Un breve esame fatto intorno le tavole de' seni, delle tangenti, seganti, e de' loro corrispondenti logaritmi basta per comprenderne la dottrina mediante le cose spiegate.

Dell' uso della tavola de' logaritmi.

307. Trovare il logaritmo di un numero naturale registrato nella tavola.

Nella colonna de' numeri assoluti si cerchi il numero proposto, il logaritmo, che esiste dirimpetto a destra, sarà il ricercato.

Per esempio se si cerca il logaritmo di 64, si trova 1 . 807806.

Se il numero proposto, cui si cerca il logaritmo, sarà maggiore di 10000, e quindi non sarà compreso nelle tavole ordinarie, converrà dividerlo per un numero tale, che il divisore, ed il quoziente si trovino registrati nelle tavole, e sommando indi i logaritmi del divisore, e del quoziente, s'avrà il logaritmo del proposto numero.

Se poi il numero proposto sarà una frazione, basterà dal logaritmo corrispondente al numeratore sottrarre il logaritmo corrispondente al denominatore, e nell'avanzo s'avrà il logaritmo della frazione, il quale sarà negativo, se la frazione sarà minore dell'unità, e sarà positivo, se la frazione sarà maggiore dell'unità.

308. Essendo proposto un logaritmo minore del massimo registrato nella tavola, si troverà il corrispondente numero assoluto col cercare esso logaritmo nella tavola, ed osservare quale sia il numero assoluto, che le corrisponde a sinistra.

Occorrendo poi, che il proposto logaritmo non sia nella tavola, ma si trovi compreso fra due di quelli, che vi sono registrati, sarà segno certo, che il nume-

ro assoluto corrispondente a questo logaritmo conterrà un qualche rotto. Per trovare questo numero si prenda nella tavola il numero assoluto corrispondente al logaritmo prossimo minore, indi dal logaritmo prossimo maggiore si sottri il prossimo minore, ed il residuo si faccia denominatore di una frazione, che abbia per numeratore la differenza tra il logaritmo proposto, ed il prossimo minore; onde il numero assoluto ricercato sarà quello, che corrisponde al logaritmo prossimo minore, e che ha in oltre il divisato rotto. Per esempio se sia proposto il logaritmo 3.7589982, di cui si cerca il corrispondente numero assoluto, si osserva nella tavola, che il numero naturale corrispondente al logaritmo prossimo minore è 5741, la differenza de' due logaritmi prossimi è 757, quella tra il prossimo minore, ed il proposto è 107, adunque il numero assoluto ricercato sarà $5741\frac{107}{757}$.

309. Dalle cose già dette (§. 301) risulta, che per avere col mezzo de' logaritmi il prodotto di due numeri assoluti, basta sommarne insieme i logaritmi, e la somma di questi corrisponderà al numero

assoluto, che uguaglia il prodotto ricercato; che col sottrarre un logaritmo da un altro s' avrà nell' avanzo il logaritmo di quel numero assoluto uguale al quoziente, che nasce dal dividere i due numeri corrispondenti ai due logaritmi; che moltiplicando un logaritmo per 2, per 3, per 5 ec. s' avrà il quadrato, il cubo, la quinta potestà del numero, cui corrisponde il logaritmo primiero, e contrariamente, se un logaritmo proposto si dividerà per 2, per 3, per 5 ec., s' avrà nel quoziente il logaritmo, che corrisponde alla radice quadrata, cubica, quinta ec. del numero assoluto, cui il logaritmo primiero s' appartiene.

310. Detto abbiamo (§. 288) che, qualora in una equazione l' incognita si trova nell' esponente, d' uopo è valersi dei logaritmi per ischivare i conti a scaletta, e risolvere il problema in una maniera scientifica. In questi casi si fanno passare tutte le cognite in un membro dell' equazione, e si lascia nell' altro la sola cognita elevata alla potestà incognita; dopo del che in vece dei numeri assoluti si scrivono i loro logaritmi, e si abbassa l' incognita in forma di coefficien-

te, indi si tratta l'equazione nel modo solito, la quale riesce poi sempre del primo grado.

Nella formola $s = p \times \frac{\overline{d^n} - p}{d - 1}$ (§. 281)

sia dato $s = 105 \frac{1}{2}$, $p = 8$; $d = \frac{3}{2}$. Sostituiscansi questi numeri nella formola, s'avrà $105 \frac{1}{2} = 8 \times \frac{\overline{\frac{3}{2}}^n - 8}{\frac{3}{2} - 1}$

o sia $\frac{243}{32} = \overline{\frac{3}{2}}^n$, e sostituendo in vece dei numeri assoluti i loro logaritmi, s'avrà $2.3856065 - 1.5051500 = 0.8804565$, ed $\overline{\frac{3}{2}}^n = 0.4771213n - 0.3010300n = 0.1760913n$; e però $8804565 = 1760913n$, ed $n = \frac{8804565}{1760913} = 5$ valore dell'incognita.

Nella formola $c \times \overline{1+d}^n = c + a$ (§. 296) sia $c = 1000000$, $d = \frac{1}{20}$, $a = 215506\frac{1}{4}$, col sostituirvi questi numeri, s'avrà

$1000000 \times \overline{\frac{21}{20}}^n = 1000000$

$+215506\frac{1}{4}$, e moltiplicando per 4, e liberando il rotto $\overline{\frac{21}{20}}^n$ dal coefficiente, sarà $\overline{\frac{21}{20}}^n = \frac{4862025}{4000000}$; e siccome questi numeri non si trovano nelle tavole de' logaritmi, così si divideranno nei loro componenti; onde sarà $\overline{\frac{21}{20}}^n = \frac{675\times7203}{4000\times1000}$, e scrivendo i loro logaritmi, sarà

$$\overline{\frac{21}{20}}^n = 1.322193n - 1.3010300n$$
$$= 0.0211893n,$$
$$\frac{675\times7203}{4000\times1000} = 2.8293038 + 3.8575134$$
$$- 3.6020600 - 3.0000000 = 0.847572,$$

avremo pertanto $211893n = 847572$, e quindi $n = \frac{847572}{211893} = 4$.

Nella formola (§. 298) $c\times d\times\overline{1+d}^n = r\times\overline{1+d}^n - r$ sia $c = 331000$, $d = \frac{1}{10}$, $r = 133100$, col sostituire questi numeri, s' avrà $331000 \times \frac{1}{10} \times \overline{\frac{11}{10}}^n = 133100 \times \overline{\frac{11}{10}}^n - 133100$, e correggendo l' espressione

pressione, sarà $\frac{1331}{1000} = \left|\overline{\frac{11}{10}}\right.^{n}$, e sostituendo i loro logaritmi, sarà

$\frac{1331}{1000} = 3.1241781 - 3.0000000$

$= .1241781$, $\left|\overline{\frac{11}{10}}\right.^{n} = 1.0413927n$

$- 1.0000000n = 0.0413927n$, e però

$1241781 = 413927n$, ed $n = \frac{1241781}{413927} = 3$.

IL FINE.

INDICE

PARTE PRIMA.

CAPO I.

CAPO II.

CAPO III.

CAPO IV.

CAPO V.

PARTE SECONDA.

CAPO I.

CAPO II.

CAPO III.

CAPO IV.

CAPO V.

PARTE TERZA.

CAPO I.

CAPO II.

CAPO III.

IN TORINO

NELLA STAMPERIA REALE.
MDCCLXXVIII.

Imprimatur. Fr. HYACINTHUS BIGLIA Ord. Præd. S. Th. Mag. & Pro-Vic. gen. S. Officii Taurini.

V. CANONICA LL. AA. P.

V. Se ne permette la ſtampa

DI FERRERE per S. E. il signor Conte CAISSOTTI Gran Cancelliere.

Tav.ª 1.ª

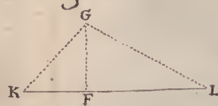
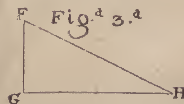
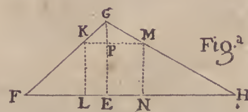
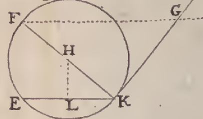
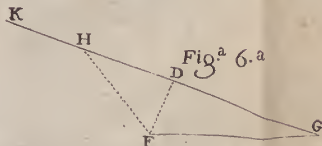

Fig.ª 1.ª
G
K
F
L

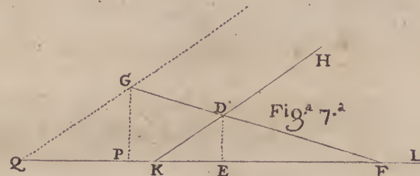

Fig.ª 2.ª
H
F
L
K
G

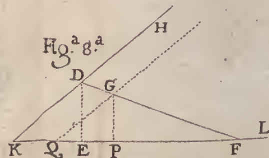

Fig.ª 3.ª
F
G
H

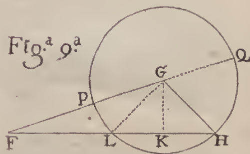

Fig.ª 4.ª
G
K
M
P
F
L
E
N
H

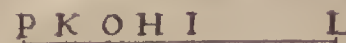

Fig.ª 5.ª
F
G
H
E
L
K

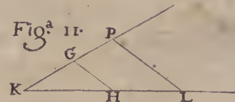

K
H
Fig.ª 6.ª
D
F
G

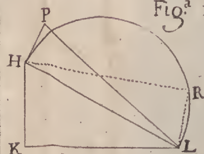

H
G
D
Fig.ª 7.ª
Q
P
K
E
F
L

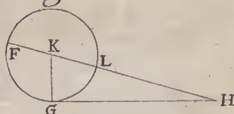

Fig.ª 8.ª
H
D
G
L
K
Q
E
P
F

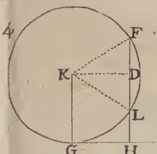

Fig.ª 9.ª
Q
G
P
F
L
K
H

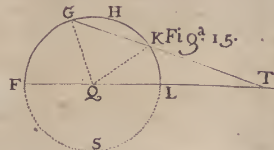

Fig.ª 10.
P K O H I
L


Fig.ª 11.
P
G
K
H
L


Fig.ª 12.
P
H
R
K
L


Fig.ª 13.
K
F
L
G
H


Fig.ª 14
F
K
D
L
G
H


G
H
K
Fig.ª 15.
F
Q
L
T
S



Tav.ª 2.ª



Fig.ª 16.



Fig.ª 19.

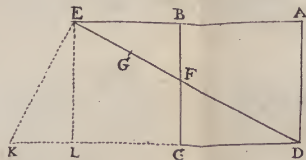


Fig.ª 17.

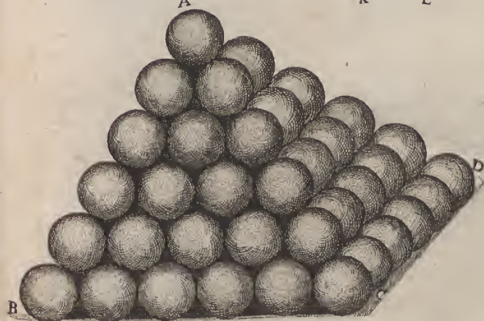


Fig.ª 18.

